Ronde schijven en platen

dr.ir. P.C.J. Hoogenboom
Sectie Constructiemechanica
Technische Universiteit Delft
16 februari 2008

Inleiding

Ronde schijven en platen zijn bijzondere gevallen van de algemene schijf- en plaattheorie. Eigenlijk komen ze niet zo veel voor. Een voorbeeld van een ronde schijf is een slijpsteen. Een voorbeeld van een ronde plaat is de bodem van een cilindrische opslagtank. In dit hoofdstuk brengen we nog een restrictie aan: De belasting moet axiaalsymmetrisch zijn. Beide voorbeelden voldoen hieraan: De slijpsteen wordt voornamelijk belast door de centripetale kracht die symmetrisch is ten opzicht van de middenas van de schijf. De tankbodem wordt belast door de vloeistof in de tank en door de wand. De tankbodem wordt gedragen door de tegendruk van de grond. Beide zijn symmetrisch om de middenas van de plaat.

De reden waarom we ronde schijven en platen beschouwen is dat de differentiaalvergelijkingen eenvoudiger zijn dan die voor algemene schijven en platen. Daardoor kan het gedrag van een ronde schijf of plaat analytisch worden berekend terwijl voor andere schijven en platen vaak een numerieke berekening nodig is. Bijvoorbeeld, in dit hoofdstuk wordt afgeleid dat de momenten onder een puntlast oneindig groot zijn. Dit geldt niet alleen voor ronde platen maar voor alle platen ongeacht de vorm. De gevolgen voor constructieberekeningen worden behandeld. Ook worden in dit hoofdstuk een aantal handige ontwerpformules afgeleid.

Differentiaalvergelijking voor ronde schijven

In een ronde schijf met axiaalsymmetrische belasting is elke taartpunt hetzelfde (Fig. 1). Daarom zijn alle grootheden een functie van de radiale afstand r [mm] en niet van de hoek θ [rad]. De verplaatsing van een punt in de r-richting is u [mm]. De rekken in de r- en θ-richting zijn $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$ [-]. De spanningen in de r- en θ-richting zijn $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ [N/mm²] respectievelijk en de volumebelasting in de r-richting is p. [N/mm³]. De dikte van de schijf is t [mm].

Het volgende schema relateert de fysische grootheden aan elkaar.

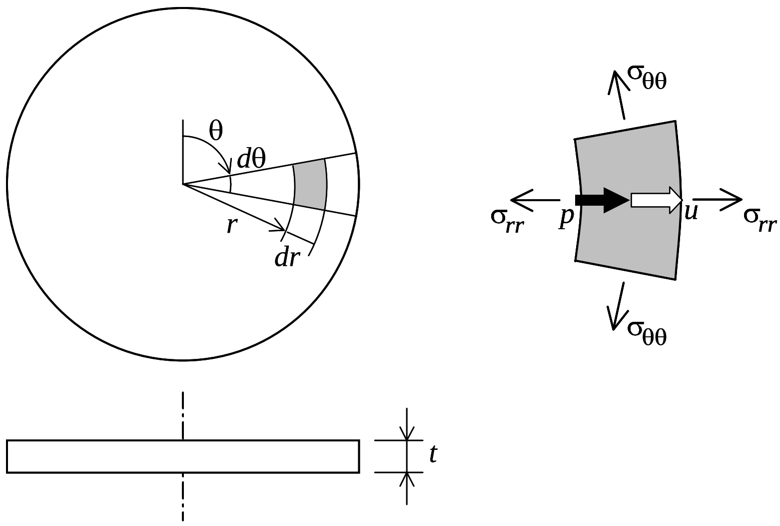
$$u \qquad \begin{bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{bmatrix} \qquad p$$

kinematische vergelijkingen	constitutieve vergelijkingen	evenwichts vergelijking

De kinematische vergelijkingen zijn

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} \quad \text{en} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}.$$

Deze zijn exact voor zowel kleine als grote verplaatsingen.



Figuur 1. Ronde schijf met axiaalsymmetrische belasting

De constitutieve vergelijkingen voor een vlakke spanningstoestand zijn

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}\right),$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}\right).$$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus en ν de dwarscontractiecoëfficiënt. Bij een vlakke spanningstoestand is de rek loodrecht op de schijf

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}\right).$$

De constitutieve vergelijkingen voor een vlakke vervormingstoestand zijn

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}\right),$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}\right).$$

Bij een vlakke vervormingstoestand is de spanning in de richting loodrecht op de schijf

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}).$$

Deze constitutieve vergelijkingen gelden alleen voor lineair-elastisch materiaalgedrag.

De evenwichtsvergelijking is

$$\sigma_{\theta\theta} - \frac{d}{dr}(r\,\sigma_{rr}) = r\,p$$

Deze geldt alleen voor kleine verplaatsingen u. We volgen de krachtenmethode voor het opstellen van de differentiaalvergelijking. Hierbij leiden we eerst een compatibiliteitsvergelijking af uit de kinematische vergelijkingen.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d}{dr}(r\,\varepsilon_{\theta\theta})$$

Vervolgens substitueren we de constitutieve vergelijkingen en de evenwichtsvergelijking in de compatibiliteitsvergelijking. Het resultaat is de differentiaalvergelijking

$$r\frac{d^2\sigma_{rr}}{dr^2} + 3\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -p(2+\nu) - r\frac{dp}{dr}.$$

Hierin is σ_{rr} de statisch onbepaalde. In de afleiding is aangenomen dat $\frac{dE}{dr} = \frac{d\nu}{dr} = 0$. Als de axiale belasting p gelijk nul is, reduceert de vergelijking tot

$$r\frac{d^2\sigma_{rr}}{dr^2} + 3\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 0 .$$

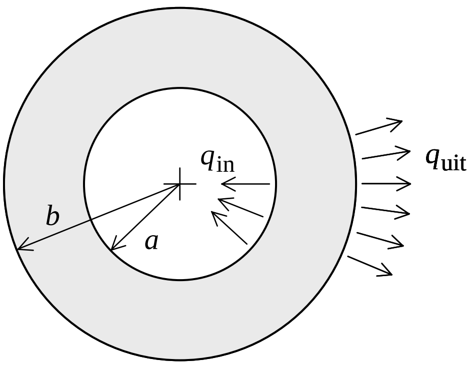
Deze homogene differentiaalvergelijking voor de vlakke spanningstoestand is hetzelfde als die voor de vlakke vervormingstoestand.

Toepassing: Spanningen in een dikwandige buis

Een lange dikwandige buis is eigenlijk een ronde schijf met een ronde opening (Fig. 2). Voor een dikwandige buis zijn de randvoorwaarden van de differentiaalvergelijking.

$$r = a \to \sigma_{rr} = q_{\text{in}}$$
$$r = b \to \sigma_{rr} = q_{\text{uit}} \quad \left[\text{N/mm}^2\right]$$

De axiale volumebelasting is nul $p = 0$. Zwaartekracht kan niet in rekening worden gebracht omdat dit geen axiale belasting is.



Figuur 2. Dikwandige buis met binnen- en buitenbelasting

De oplossing van de differentiaalvergelijking is berekend met Maple [6] (bijlage 1)

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2b^2(q_{\text{in}} - q_{\text{uit}}) + r^2(b^2q_{\text{uit}} - a^2q_{\text{in}})}{r^2(b^2 - a^2)}.$$

De spanning in de tangentiele richting volgt uit de evenwichtsvergelijking

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{-a^2 b^2 (q_{\text{in}} - q_{\text{uit}}) + r^2 (b^2 q_{\text{uit}} - a^2 q_{\text{in}})}{r^2 (b^2 - a^2)} .$$

De spanningen zijn geplot in figuur 3 voor $\frac{b}{a} = 2,\ q_{\text{uit}} = 0$ en $q_{\text{in}} = -5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

De grootste tangentiele spanning is

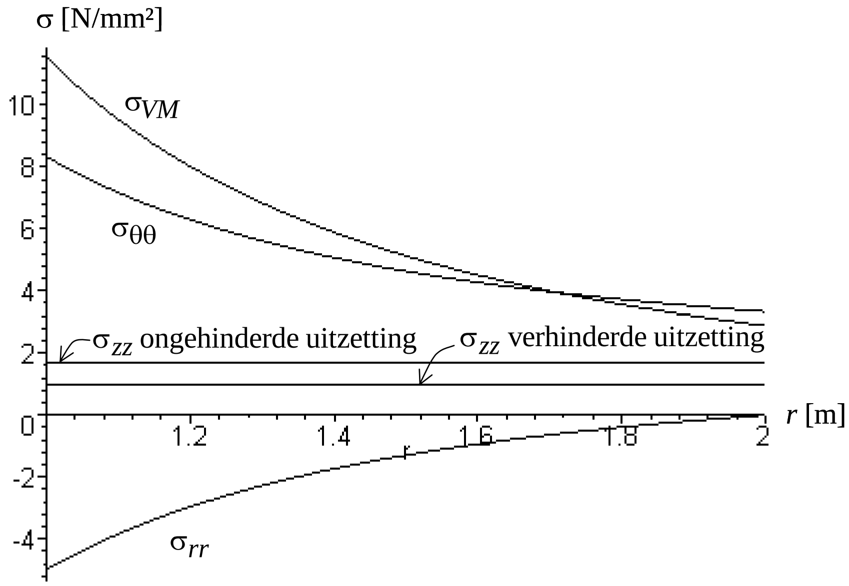
$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2b^2 q_{\text{uit}} - q_{\text{in}} (b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} .$$

Deze treedt op in de binnenwand van de buis in de tangentiele richting. Als verlenging van de buis is verhinderd – vlakke vervormingstoestand – is de spanning in de lengterichting van de buis

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 2\nu \frac{b^2 q_{\text{uit}} - a^2 q_{\text{in}}}{b^2 - a^2} .$$

Hierdoor wordt een axiale kracht N ontwikkeld

$$N = \sigma_{zz} (\pi b^2 - \pi a^2) = 2\nu\pi (b^2 q_{\text{uit}} - a^2 q_{\text{in}}) .$$



Figuur 3. Spanningen in een dikwandige buis $a = 1\text{m},\ b = 2\text{m},\ q_{in} = -5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},\ q_{uit} = 0,\ \nu = 0.3.$

Als verlenging van de buis vrij is – vlakke spanningstoestand – is de spanning in de lengterichting de buis

$$\sigma_{zz} = \frac{\pi b^2 q_{\text{uit}} - \pi a^2 q_{\text{in}}}{\pi b^2 - \pi a^2} = \frac{b^2 q_{\text{uit}} - a^2 q_{\text{in}}}{b^2 - a^2} .$$

Dit is de resulterende axiale kracht door de binnen- en buitendruk gedeeld door het doorsnede-oppervlak.

De vergelijkingsspanning in de binnenwand van de buis volgens Von Misses is

$$\hat{\sigma}_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left((\hat{\sigma}_{\theta\theta}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-q_{\text{in}})^2+(q_{\text{in}}-\hat{\sigma}_{\theta\theta})^2\right)}\ .$$

Toepassing: Boorgaten

Stel dat we een gat boren in een materiaal dat alzijdig onder een spanning σ staat. Deze situatie kan gemodelleerd worden als een heel grote buis met een kleine opening.

$$q_{\text{in}} = 0,\ q_{\text{uit}} = \sigma,\ b \to \infty$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2b^2 q_{\text{uit}} - q_{\text{in}}(b^2+a^2)}{b^2-a^2} = \frac{2\sigma}{1-\dfrac{a^2}{b^2}} = 2\sigma$$

Dus in de wand van het gat wordt de spanning twee maal zo groot als deze was voordat het gat werd geboord.

Stel dat we een gat boren in een materiaal dat niet onder spanning staat. Vervolgens vullen we het gat met een vloeistof met een druk *q*. Ook deze situatie kan gemodelleerd worden als een heel grote buis met een kleine opening.

$$q_{\text{in}} = -q,\ q_{\text{uit}} = 0,\ b \to \infty$$

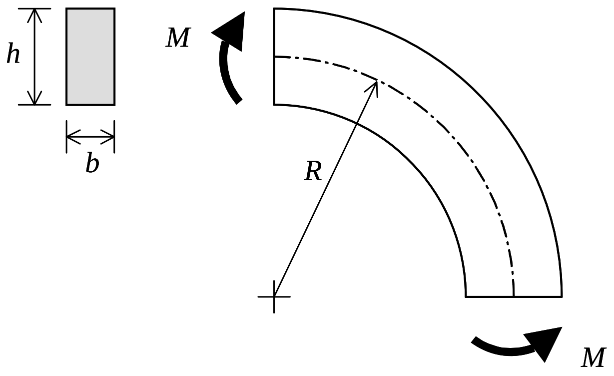
$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2b^2 q_{\text{uit}} - q_{\text{in}}(b^2+a^2)}{b^2-a^2} = \frac{q(1+\dfrac{a^2}{b^2})}{1-\dfrac{a^2}{b^2}} = q$$

Dus in de wand van het gat ontstaat een trekspanning die gelijk is aan de drukspanning in de vloeistof. Dit wordt door aardoliemaatschappijen gebuikt om scheuren te creëren in olievoerende grondlagen. Als in de richting van het gat geen spanning heerst – vlakke spanningstoestand – is de Von Misses-spanning

$$\hat{\sigma}_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left((q-0)^2+(0+q)^2+(-q-q)^2\right)} = \sqrt{3}q\ .$$

Toepassing: Spanningen in een gekromde ligger

Een gekromde ligger kan worden opgevat als een deel van een ring. Een ring kan worden opgevat als een ronde schijf met een ronde opening in een vlakke spanningstoestand (Fig. 4). De afleiding wordt hier kort samengevat. Voor een uitgebreide uitwerking zie literatuur [1] en [3].



Figuur 4. Gekromde ligger

We veronderstellen dat de ring uit vezels bestaat in de tangentiele richting. Deze vezels geven we een kunstmatige rek ε_i . De constitutieve vergelijkingen worden aldus

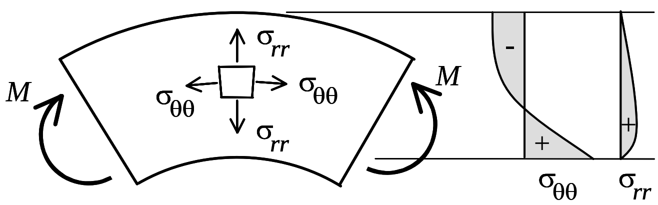
$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{Et}\left(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}\right) + \varepsilon_i .$$

Het blijkt dat door deze aanpassing overal in de ring een moment *M* heerst en de normaalkracht en dwarskracht gelijk aan nul zijn $N = D = 0$. Dat is precies de situatie die we willen bestuderen.
De spanningsverdeling in de ring is getekend in figuur 5. We zien dat de spanning het grootst is aan de binnenzijde van de ring. De spanningsverdeling is niet-lineair. Dit is anders dan bij rechte liggers waar de spanningsverdeling lineair is. Om die reden kunnen we geen gebruik maken van het weerstandsmoment *W* voor rechte liggers. Voor gekromde liggers met een rechthoekige doorsnede wordt de grootste spanning berekend met het volgende weerstandsmoment.

$$W = \frac{1}{6} b h^2 \left(1 - \frac{h}{3R}\right) \qquad h < R$$

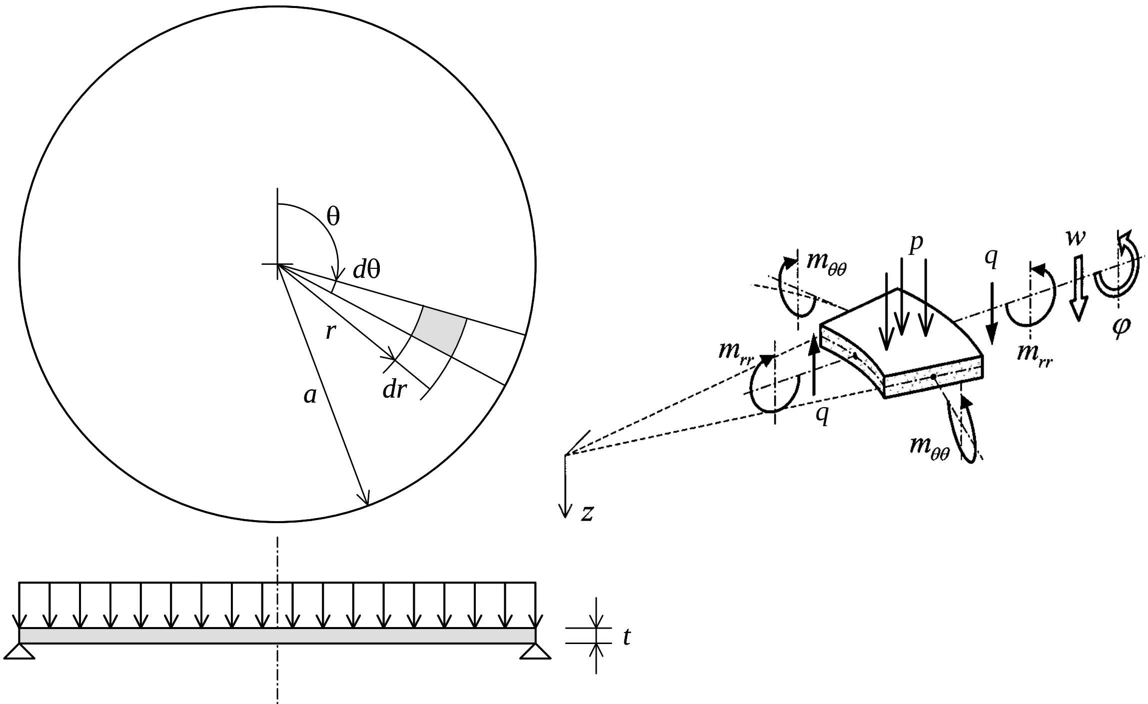
Hierin is *b* de breedte van de doorsnede en *h* de hoogte van de doorsnede. *R* is de kromtestraal gerekend tot de hartlijn van de doorsnede. Deze uitdrukking is voldoende nauwkeurig als *h* kleiner is dan *R*.
Een soortgelijke formule kan worden afgeleid voor het traagheidsmoment *I* van gekromde liggers met een rechthoekige doorsnede. Het traagheidsmoment is slechts in geringe mate afhankelijk van de kromming als *h* kleiner is dan *R*. Daarom kan met een raamwerkprogramma een gekromde ligger worden gemodelleerd met een aantal korte rechte liggers. Wanneer daarna de spanning wordt gecontroleerd moet het bovenstaande weerstandsmoment worden gebruikt.



Figuur 5. Tangentiele en radiale spanning in een gekromde ligger

Differentiaalvergelijking voor ronde platen

In een ronde plaat met axiaalsymmetrische belasting is elke taartpunt hetzelfde (Fig. 6). Daarom zijn alle grootheden een functie van de radiale afstand r [m] en niet van de hoek θ [rad]. De verplaatsing van een punt in de z-richting is w [m]. De krommingen in de r- en θ-richting zijn $\kappa_{rr}, \kappa_{\theta\theta}$ [1/m]. De momenten in de r- en θ-richting zijn $m_{rr}, m_{\theta\theta}$ [kNm/m] respectievelijk en de verdeelde belasting in de z-richting is p. [kN/m²]. De dikte van de plaat is t [m].



Figuur 6. Ronde plaat

Het volgende schema relateert de fysische grootheden aan elkaar.

$$w \qquad \begin{bmatrix} \kappa_{rr} \\ \kappa_{\theta\theta} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} m_{rr} \\ m_{\theta\theta} \end{bmatrix} \qquad p$$

kinematische vergelijkingen	constitutieve vergelijkingen	evenwichts vergelijking

De kinematische vergelijkingen zijn

$$\kappa_{rr} = -\frac{d^2 w}{dr^2},$$
$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}.$$

Deze zijn geldig voor kleine verplaatsingen w. In bijlage 2 is de vergelijking voor $\kappa_{\theta\theta}$ afgeleid. De constitutieve vergelijkingen voor ronde platen zijn

$$m_{rr} = D(\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\theta\theta}),$$
$$m_{\theta\theta} = D(\kappa_{\theta\theta} + \nu\kappa_{rr}).$$

Deze zijn alleen geldig voor lineair-elastische materialen. In het voorgaande is D de plaatstijfheid

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} .$$

De evenwichtsvergelijking is

$$\frac{dm_{\theta\theta}}{dr} - \frac{d^2}{dr^2}(r\, m_{rr}) = rp$$

Deze is geldig voor kleine verplaatsingen w. In bijlage 2 is deze evenwichtsvergelijking afgeleid. We volgen de verplaatsingsmethode voor het opstellen van de differentiaal-vergelijking. Hierbij substitueren we alle vergelijkingen in de evenwichtsvergelijking. Het resultaat is

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{D} .$$

Toepassing: Ronde plaat, scharnierend ondersteund met gelijkmatig verdeelde belasting

We beschouwen een ronde plaat met een straal a (Fig. 6). De plaat is scharnierend ondersteund aan de rand daarom is de verplaatsing daar nul en is het moment daar nul

$$r = a \rightarrow \; w = 0, \; m_{rr} = 0 .$$

In het midden van de plaat is de vervorming symmetrisch. Daarom heeft de plaat aldaar geen helling. Ook is de dwarskracht q daar nul.

$$r = 0 \rightarrow \; \frac{dw}{dr} = 0, \; q = 0 .$$

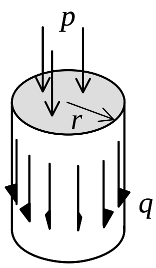
Dat de dwarskracht gelijk nul is volgt uit een evenwichtsbeschouwing van het middendeel van de plaat (Fig. 7). Naar beneden werkt de belasting p [kN/m²] maal het oppervlak πr^2 [m²]. Naar beneden werkt ook de verdeelde dwarskracht q [kN/m] maal de omtrek $2\pi r$ [m]. Dus

$$p\pi r^2 + q 2\pi r = 0 ,$$

ofwel

$$q = -\frac{1}{2} pr .$$

Wanneer de straal r van boven naar nul gaat wordt q gelijk nul, hetgeen te bewijzen was.



Figuur 7. Verticaal evenwicht van het middendeel van de plaat

De oplossing van de differentiaalvergelijking is berekend met Maple [6] (bijlage 3)

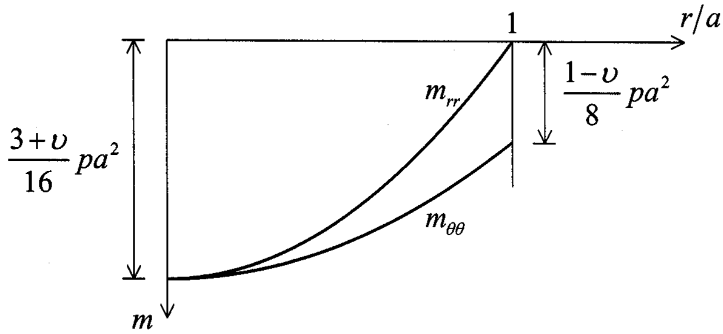
$$w = \frac{p}{64D}(a^2 \frac{5+\nu}{1+\nu} - r^2)(a^2 - r^2)\,.$$

De doorbuiging in het midden is

$$\hat{w} = \frac{p\,a^4}{64D}\,\frac{5+\nu}{1+\nu}$$

Het grootste moment treedt op in het midden van de plaat (Fig. 8)

$$\hat{m}_{rr} = \hat{m}_{\theta\theta} = \frac{1}{16}\,p\,a^2(3+\nu)\,.$$



Figuur 8. Momentenlijnen van de ronde plaat

Merk op dat de momenten niet afhangen van de elasticiteitsmodulus E maar wel van de dwarscontractiecoëfficiënt ν. Dit geldt voor elke plaatvorm zolang geen steunpuntszetting of temperatuurbelasting optreedt. Voor staal geldt ν = 0,35. Voor ongescheurd beton geldt ν = 0,15. Voor gescheurd beton geldt ν = 0.

Merk op dat aan de rand van de plaat een aanzienlijk buigend moment optreedt in de tangentiele richting. Bij scharnierende rechte randen treedt een soortgelijk moment niet op. Daarom moeten ronde betonnen platen ook in de omtreksrichting worden gewapend.

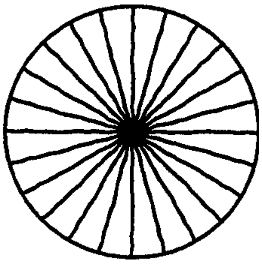
Omdat de belasting axiaalsymmetrisch is, treedt geen wringmoment $m_{r\theta}$ op, er is dus geen sprake van een geconcentreerde dwarskracht in de plaatrand.

De grootste spanning in een doorsnede kunnen we berekenen met

$$\sigma = \frac{|m|}{\frac{1}{6}t^2}$$

wat alleen geldt zolang het materiaal niet vloeit.

Zonder afleiding wordt vermeld dat de plastische bezwijklast van de plaat is $p = 6\frac{m_p}{a^2}$, waarin m_p [kNm/m] is een isotroop verdeeld plastisch-moment (Fig. 9). Het beschouwde bezwijkmechanisme is buiging. Afschuiving, pons en membraanwerking zijn dus buiten beschouwing gelaten.



Figuur 9. Vloeilijnenpatroon van de ronde plaat

Toepassing: Ronde plaat, ingeklemd met gelijkmatig verdeelde belasting

We beschouwen een ronde plaat met een straal *a*. De plaat is ingeklemd aan de rand daarom is de verplaatsing daar nul en de helling is daar nul

$$r = a \rightarrow \; w = 0, \; \frac{dw}{dr} = 0 \, .$$

In het midden van de plaat is de vervorming symmetrisch. Daarom heeft de plaat aldaar geen helling. Ook is de dwarskracht *q* daar nul.

$$r = 0 \rightarrow \; \frac{dw}{dr} = 0, \; q = 0 \, .$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is berekend met Maple [6]

$$w = \frac{p}{64D}(a^2 - r^2)^2 \, .$$

De doorbuiging in het midden is

$$\hat{w} = \frac{p\,a^4}{64D}$$

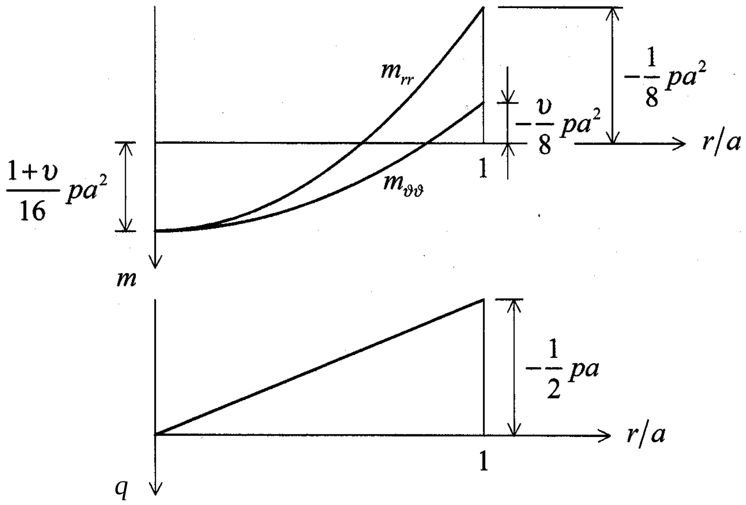
Het moment in het midden van de plaat is (Fig. 10)

$$m_{rr} = m_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{16}\,p\,a^2 \, .$$

Merk op dat de momentenlijnen van de scharnierende ronde plaat kunnen worden verkregen door de momentenlijnen van de ingeklemde ronde plaat te verschuiven over een afstand

$\frac{1}{8} p a^2$.

De plastische bezwijklast bedraagt $p = 12 \frac{m_p}{a^2}$.



Figuur 10. Momenten m en dwarskracht q in een ronde ingeklemde plaat

Rekenvoorbeeld

Een ronde stalen buispaal met een inwendige diameter van 508 mm wordt afgesloten met een ronde stalen voetplaat met een dikte van 40 mm. De voetplaat wordt vastgelast waardoor de rand wordt ingeklemd. De voetplaat wordt berekend op een gelijkmatig verdeelde belasting door de maximale conusweerstand van 12 N/mm². De elasticiteitsmodulus is 2,1 10^5 N/mm² en dwarscontractiecoëfficiënt is 0,3.

De plaatstijfheid is $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2{,}1 \times 10^5 40^3}{12(1-0{,}3^2)} = 12308 \times 10^5$ Nmm.

De doorbuiging in het midden bedraagt $\hat{w} = \frac{p a^4}{64D} = \frac{12 \times 254^4}{64 \times 12308 \times 10^5} = 0{,}6$ mm

Het grootse moment treedt op aan de rand

$$m_{rr} = -\frac{1}{8} p a^2 = -\frac{1}{8} 12 \times 254^2 = -96774 \text{ N} \qquad m_{\theta\theta} = -\frac{\nu}{8} p a^2 = -\frac{0{,}3}{8} 12 \times 254^2 = -29032 \text{ N}$$

De spanningen worden

$$\sigma_{rr} = \frac{|m_{rr}|}{\frac{1}{6} t^2} = \frac{96774}{\frac{1}{6} 40^2} = 363 \text{ N/mm²} \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{|m_{\theta\theta}|}{\frac{1}{6} t^2} = \frac{29032}{\frac{1}{6} 40^2} = 109 \text{ N/mm²}$$

De vergelijkingsspanning volgens Von Mises is

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}((363-109)^2 + 363^2 + 109^2)} = 323 \text{ N/mm²}$$

Toepassing: Puntlast op een ronde plaat ingeklemd aan de randen

We beschouwen een puntlast F [kN] op een ingeklemde ronde plaat. De randvoorwaarden zijn

$$r = a \rightarrow \; w = 0,\; \frac{dw}{dr} = 0$$
$$r = 0 \rightarrow \; \frac{dw}{dr} = 0,\; q = -\frac{F}{2\pi r} \; .$$

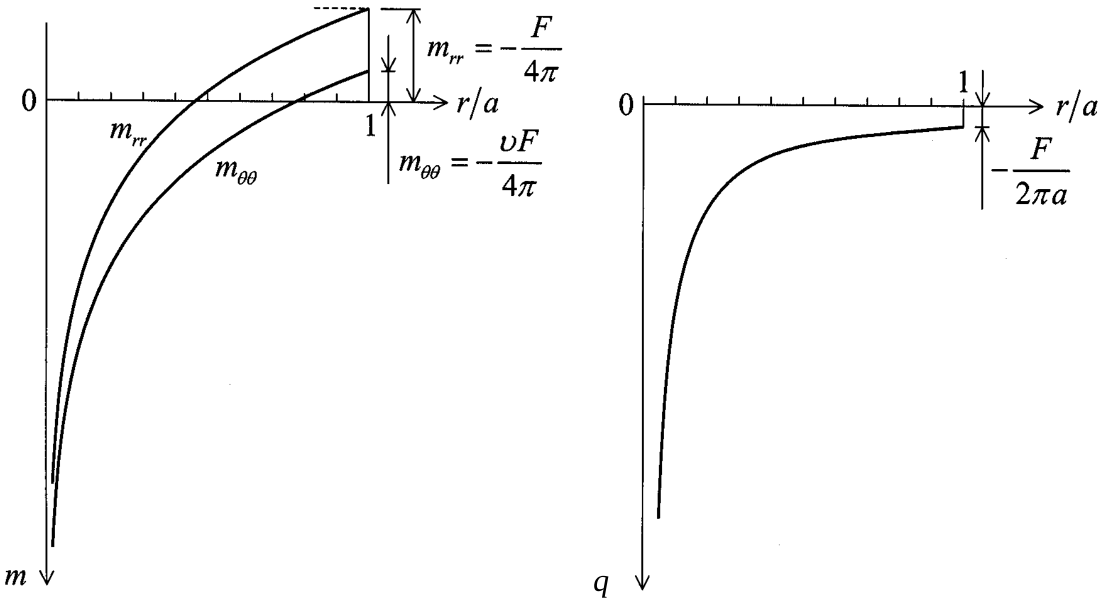
De oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$w = \frac{Fa^2}{16\pi D}(1 - \frac{r^2}{a^2}) + \frac{Fr^2}{8\pi D}\ln\frac{r}{a} \; .$$

De grootste doorbuiging is

$$\hat{w} = \frac{Fa^2}{16\pi D} \; .$$

De momenten en dwarskrachten zijn oneindig groot onder de puntlast (Fig. 11). Dit geldt niet alleen voor ronde platen maar voor elke plaatvorm. Bijvoorbeeld, als een vlieg gaat zitten op een tafel – ergens in het midden – dan voorspelt de plaattheorie dat de momenten onder de zes vliegenpoten oneindig groot zijn. Daardoor zou het tafelblad moeten scheuren. In werkelijkheid gebeurt dat natuurlijk niet. De conclusie is dat de plaattheorie niet geldig is dicht bij een puntlast. Op een afstand van ongeveer de plaatdikte zijn de momenten en dwarskrachten weer betrouwbaar. Als we echt willen weten wat er onder de vliegenpoten gebeurt moeten we een driedimensionaal model maken van een deel van het tafelblad rond de vlieg.



Figuur 11. Momenten m en dwarskracht q in een ingeklemde ronde plaat door een puntlast F

Bij eindige-elementenberekeningen wordt regelmatig de volgende fout gemaakt: De constructeur voert een gewapend betonnen vloer in en modelleert een deel van de belasting met puntlasten. Hij maakt de berekening maar hij vraagt zich af of het elementennet fijn genoeg is. Daarom maakt hij nog een berekening met een fijner elementennet. Hij constateert dat onder de puntlasten de momenten in de tweede berekening veel groter zijn dan in de eerste berekening. Hij concludeert dat het elementennet niet fijn genoeg is, immers als het fijn genoeg is zouden de veranderingen verwaarloosbaar zijn geweest. Vervolgens maakt hij een derde berekening met een nog fijner elementennet. Het resultaat is dat de momenten onder de puntlasten nog groter worden. Nu weet de constructeur niet meer wat hij moet doen. Waarop moet hij de wapening nu baseren? Uit figuur 11 volgt dat het geen zin heeft om een nog fijner net te kiezen omdat de momenten naar oneindig gaan. Ervaring leert dat het geen zin heeft om elementen te gebruiken die een lengte of breedte hebben die kleiner is dan de dikte van de plaat.

In de volgende paragraven wordt bestudeerd wat de momenten zijn als we de puntlast op verschillende manieren verdelen.

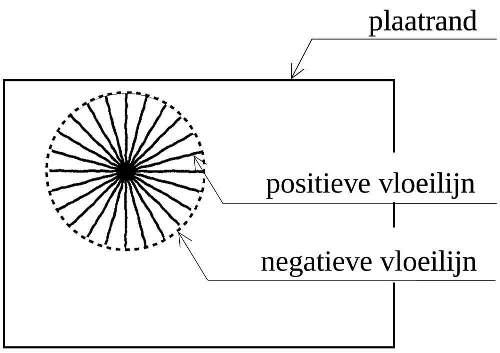
De momentenpiek kan worden uitgemiddeld over een snede met een breedte 2*b*.

$$m_{\theta\theta,gem.} = -\frac{1}{2b} 2\int_0^b m_{\theta\theta}\, dr = \frac{F}{4\pi}\left(1 + (1+\nu)\ln\frac{a}{b}\right)$$

Dit resultaat wordt verderop gebruikt om een ontwerpregel te formuleren.

Zonder afleiding [7] wordt nog vermeld dat de plastische bezwijklast is $F = 4\pi m_p$, waarin m_p [Nm/m] is het verdeeld plastisch-moment. Het beschouwde bezwijkmechanisme is buiging. Afschuiving, pons en membraanwerking zijn hierin buiten beschouwing gelaten. Merk op dat de bezwijklast niet afhangt van de straal van de plaat. Deze bezwijklast ook is ook een bovengrens voor niet-ronde platen (Fig. 12). Daarom moet een plaat belast door een puntlast ten minste gewapend worden op

$$m = \pm\frac{F}{4\pi}.$$



Figuur 12. Bezwijkmechanisme voor een puntlast op een rechthoekige plaat

Toepassing: Cirkelvormige verdeelde belasting op het midden van een ronde scharnierend opgelegde plaat

We beschouwen een gelijkmatig verdeelde belasting *p* [kN/m²] op het middendeel van een ingeklemde ronde plaat (Fig. 13). De rand- en overgangsvoorwaarden zijn

$$r = 0 \rightarrow \frac{dw}{dr} = 0,\ q = 0.$$

$$r = b \rightarrow \; w^{-} = w^{+}, \quad \frac{dw^{-}}{dr} = \frac{dw^{+}}{dr}, \quad m_{rr}^{-} = m_{rr}^{+}, \quad q^{-} = q^{+}.$$
$$r = a \rightarrow \; w = 0, \; m_{rr} = 0.$$

De resultante van de belasting is

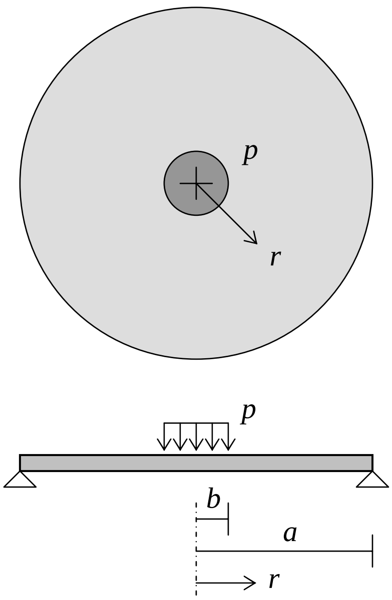
$$F = \pi a^2 p.$$

De berekening is uitgevoerd in bijlage 5. De oplossing van de differentiaalvergelijking is te groot om hier te vermelden. De grootste doorbuiging is

$$\hat{w} = \frac{F\,a^2}{16\pi D}\frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{F\,b^2}{64\pi D}\left(\frac{7+3\nu}{1+\nu} + 4\ln\frac{a}{b}\right).$$

Het grootste moment treedt op in het midden van de plaat (Fig. 14)

$$\hat{m}_{rr} = \hat{m}_{\theta\theta} = \frac{F}{16\pi}\left(4 - \frac{b^2}{a^2}(1-\nu) + 4(1+\nu)\ln\frac{a}{b}\right)$$



Figuur 13. Puntlast F verdeeld over het middeldeel van de plaat

Als b klein is ten opzichte van a kan dit nauwkeurig benaderd worden als

$$\hat{m}_{\theta\theta} = \frac{F}{4\pi}\left(1 + (1+\nu)\ln\frac{a}{b}\right).$$

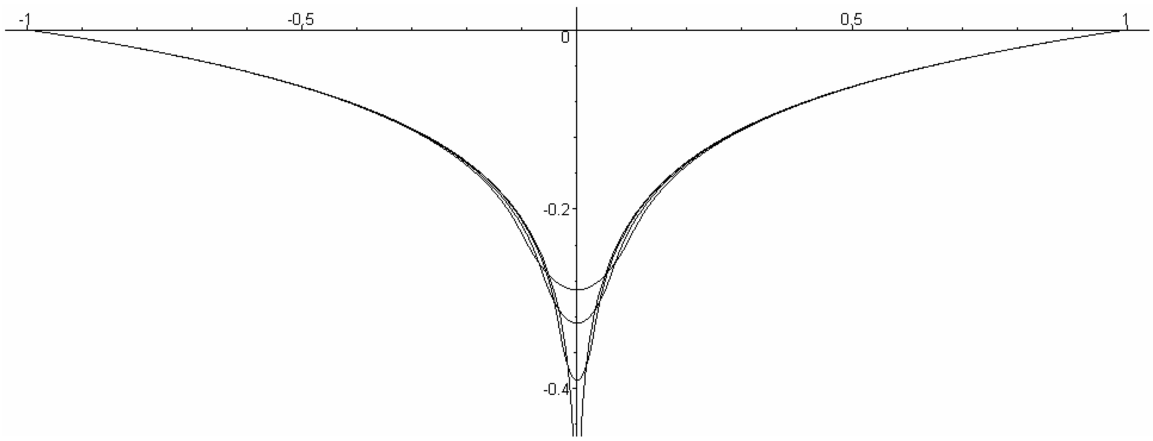
Als de plaatrand is ingeklemd wordt de benadering van het grootste moment

$$\hat{m}_{\theta\theta} = \frac{F}{4\pi}(1+\nu)\ln\frac{a}{b}.$$

Voor zowel de scharnierende als de ingeklemde rand kan de straal r worden bepaald waarbij het moment m_{rr} door een puntlast F gelijk is aan het grootste moment $\hat{m}_{rr}$ door een verdeelde belasting p

$$r = b\,e^{\frac{-1}{1+\nu}} \approx 0.45b\,.$$

Bijvoorbeeld, een gelijkmatig verdeelde belasting p over een gebied met een diameter van 0.5 m kan worden gemodelleerd als een puntlast $F = \pi b^2 p$ mits de momentenpiek wordt afgekapt waar deze een dikte heeft van 0,22 m.



Figuur 14. Momentenlijnen $-\dfrac{m_{rr}}{F}$ *voor* b = 0, t, 2t, 3t en $t = \dfrac{1}{30}a$

Ook kan de breedte b_{gem} worden bepaald waarbij het gemiddelde moment $m_{\theta\theta,gem}$ door een puntlast F gelijk is aan het grootste moment $\hat{m}_{rr}$ door een verdeelde belasting p.

$$b_{gem} = e^{\ln b + \frac{1}{1+\nu}} \approx 2{,}30b$$

Hetzelfde resultaat wordt verkregen bij een ingeklemde rand.

Bijvoorbeeld, een gelijkmatig verdeelde belasting p over een gebied met een diameter van 0.5 m kan worden gemodelleerd als een puntlast $F = \pi b^2 p$ mits de momentenpiek wordt gemiddeld over een breedte van 1,15 m.

De plastische bezwijklast voor de beschouwde situatie is

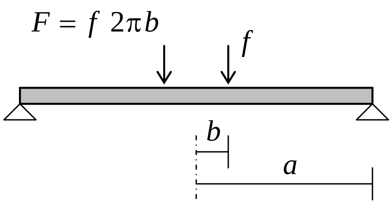
$$F = \frac{2\pi m_p}{1 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}}\,.$$

De afleiding hiervan kunnen we vinden in literatuur [7], waarin is aangenomen dat de wapening in loodrechte richtingen gelijk is over het gehele plaatoppervlak. Hieruit volgt voor het moment in de vloeilijnen van de uiterste grenstoestand

$$m = \frac{F}{4\pi}\left(2 - \frac{4}{3}\frac{b}{a}\right).$$

Toepassing: Cirkelvormige lijnlast (ringlast) op het midden van een ronde scharnierend opgelegde plaat

We beschouwen een cirkelvormige lijnlast f [kN/m] om het midden van een ronde plaat. De plaat is scharnierend ondersteund aan de rand (Fig. 15). De situatie van de ringbelasting op een lineair elastische plaat is een goede schematisering van een vloer die ondersteund wordt door een ronde kolom (keer het mechanica schema om). De vloer blijkt namelijk vooral op de randen van de kolom te steunen.



Figuur 15. Cirkelvormige lijnlast om het middel van een ronde plaat

De rand- en overgangsvoorwaarden zijn

$$r = 0 \rightarrow \ \frac{dw}{dr} = 0,\ q = 0\,,$$

$$r = b \rightarrow \ w^- = w^+,\quad \frac{dw^-}{dr} = \frac{dw^+}{dr}\,,\quad m_{rr}^- = m_{rr}^+,\quad q^- = f + q^+\,,$$

$$r = a \rightarrow \ w = 0,\quad m_{rr} = 0\,.$$

De berekening is uitgevoerd in bijlage 6. De oplossing van de differentiaalvergelijking is te groot om hier te vermelden. Het grootste moment treedt op onder de belasting (Fig. 16)

$$\hat{m}_{rr} = \hat{m}_{\theta\theta} = \frac{f\,a}{4}\left((1 - \frac{b^2}{a^2})(1-\nu) + 2(1+\nu)\ln\frac{a}{b}\right).$$

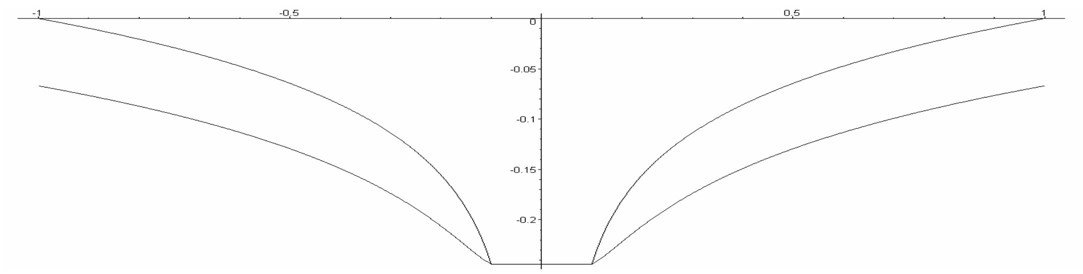
Als b klein is ten opzichte van a kan dit nauwkeurig benaderd worden als

$$\hat{m}_{rr} = \frac{F}{4\pi}\left(\frac{1}{2}(1-\nu) + (1+\nu)\ln\frac{a}{b}\right),$$

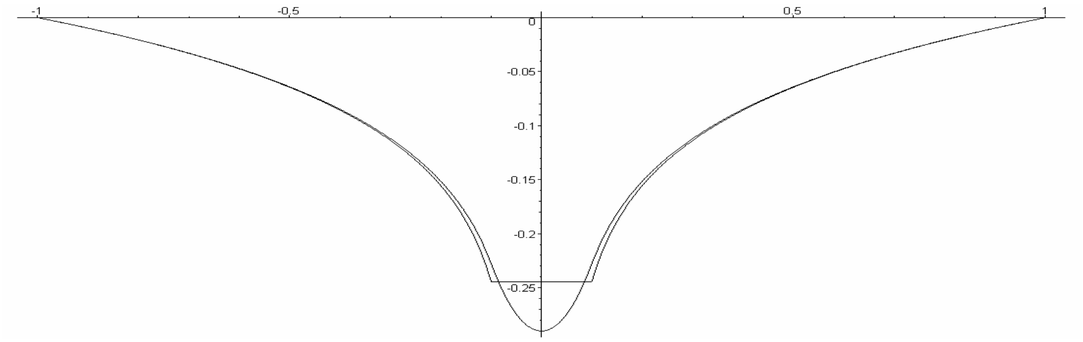
waarin $F = f\,2\pi a$ de resultante van de belasting is. Voor gescheurd beton is de dwarscontractiecoëfficiënt nul. Hiermee vinden we

$$\hat{m}_{rr} = \frac{F}{4\pi}\left(\frac{1}{2} + ln\frac{a}{b}\right).$$

Merk op dat als b naar nul gaat het moment weer oneindig groot wordt.



Figuur 16. Momentenlijnen $-\frac{m_{rr}}{F}$ *en* $-\frac{m_{\theta\theta}}{F}$ *van een ringlast voor* $b = \frac{1}{10}a$



Figuur 17. Momentenlijnen $-\frac{m_{rr}}{F}$ *van een ringlast en een verdeelde last voor* $b = \frac{1}{10}a$

De middelingsbreedte b_{gem} waarbij het gemiddelde moment $m_{\theta\theta,gem}$ door een puntlast *F* gelijk is aan het grootste moment $\hat{m}_{rr}$ door een ringlast *f* is.

$$b_{gem} = e^{\ln b + \frac{1}{2}\frac{3+\nu}{1+\nu}} \approx 3{,}79b$$

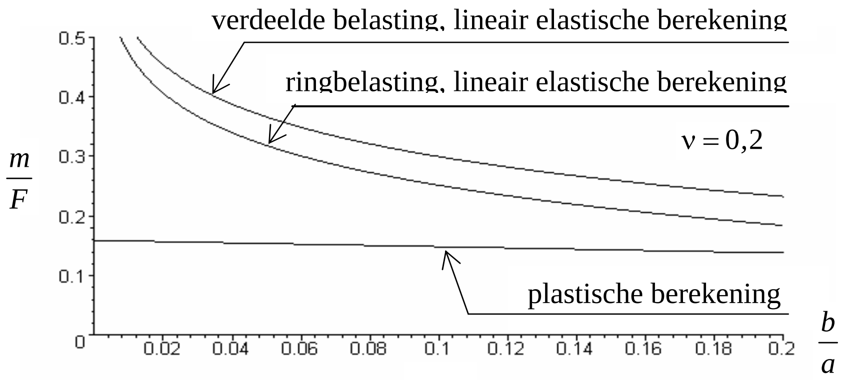
Hetzelfde resultaat wordt verkregen bij een ingeklemde rand.

Overzicht puntlast

In figuur 18 zijn de grootste momenten geplot die zijn gevonden in de bovenstaande berekeningen bij de verdeelde belasting en de ringbelasting. Met plastische berekeningen worden voor beide verdelingen dezelfde momenten gevonden. In de uiterste grenstoestand zouden we eigenlijk met de plastische momenten kunnen rekenen, echter, er is nog onvoldoende ervaring met deze aanpak om dit algemeen in de praktijk toe te passen. Bovendien is er geen noodzaak om zo weinig wapening toe te passen als uit plastische berekeningen volgt.

Vuistregel voor constructeurs

In de praktijk zal een puntlast of kolom een diameter hebben in de orde van 1 à 2 maal de plaatdikte *t*. De dikte past op zijn beurt 20 à 30 maal in de overspanning *b*. Dat betekent dat *b/a* varieert van 20 tot 60. Aangenomen dat de puntlast of kolomreactie mag worden vervangen door een ringlast en met de waarde ν = 0,2 voor beton leidt dit tot de vuistregel dat het moment ongeveer varieert tussen: $m = F/3$ en $m = F/2{,}5$. De eerste waarde geldt voor de relatief dikke vloer met minst geconcentreerde puntlast. De tweede waarde voor de relatief dunne plaat met meest geconcentreerde puntlast. Wie één waarde wil onthouden: $m = F/3$.

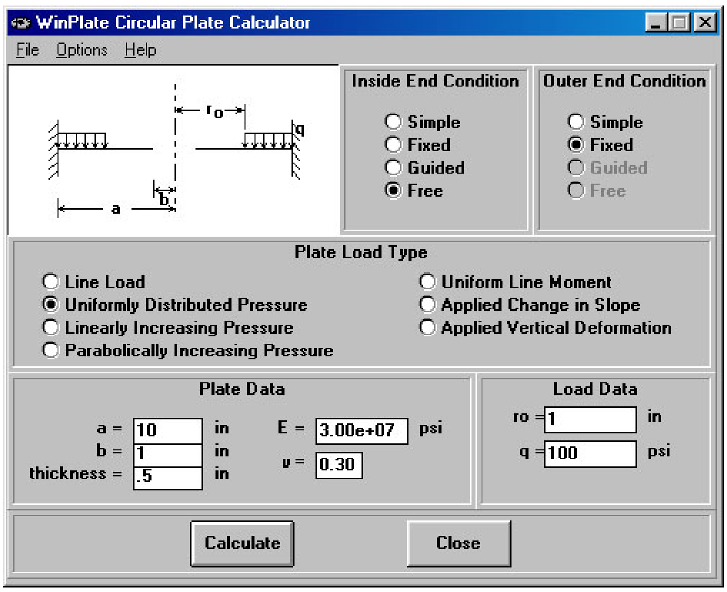


Figuur 18. Grootste momenten voor verschillende verdelingen van de belasting

Toepassing: WinPlate, software voor ronde platen

Het softwarebedrijf Archon Engineering in Columbia, Missouri, USA heeft een handig programmaatje ontwikkeld speciaal voor berekening van ronde platen. Het programma heet WinPlate en is gebaseerd op de differentiaalvergelijking op bladzijde 8. Met het programma kunnen allerlei randvoorwaarden en belastingen worden gekozen. Bovendien kan in het midden van de plaat een ronde opening worden gekozen (Fig. 19). Het programma tekent de doorbuigingen, de dwarskrachtenlijn en beide momentenlijnen.

WinPlate kost $40,-. Het programma kan 30 dagen gratis uitgeprobeerd worden. Het programma kan gedownload worden van http://www.archonengineering.com. Er is ook een oude gratis versie van WinPlate in omloop (uitgereikt bij de cursus). Deze versie gebruikt Amerikaanse eenheden wat op het eerste gezicht een nadeel lijkt. Echter, elk consistent systeem van eenheden kan gebruikt worden. Bijvoorbeeld, vervang overal “in” (inch) door “m” (meter) en “lb” (pound) door “kN” (kilo-Newton) en de gegevens kunnen zonder omrekenen worden ingevoerd en afgelezen. Merk op dat “psi” (pounds per square inch) dan moet worden vervangen door kN/m^2.



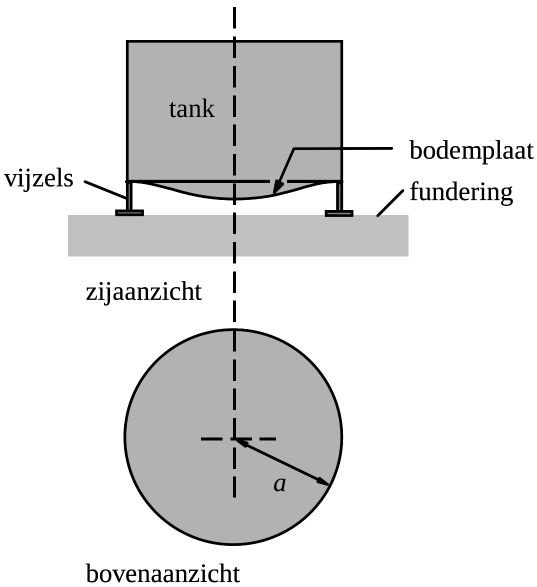
Figuur 19. Screen shot van WinPlate

Toepassing: Renovatie van een stalen opslagtank [1]

In de europoort staan vele stalen opslagtanks voor chemische vloeistoffen. Deze tanks hebben een plaatstalen bodem die rust op betonnen platen. De betonnen platen liggen simpelweg in het zand en zakken scheef in de loop van jaren. Voor onderhoud aan de betonnen platen worden de tanks twee meter opgevijzeld. De vijzels staan onder de rand van een tank en vaak ook onder de tankbodem in concentrische cirkels (Fig. 20).

Een constructeur kreeg als opdracht om de spanningen in met name de tankbodem te controleren die zouden optreden tijdens het onderhoud. Hij gebruikte voor de berekeningen de theorie voor ronde platen zoals deze in dit hoofdstuk is behandeld. De berekende spanningen waren veel groter dan normaal constructiestaal kan verdragen. Zijn conclusie was derhalve dat de voorgestelde onderhoudsprocedure niet geschikt is. De aannemer, daarentegen, was van mening dat de procedure wel geschikt is. De aannemer had deze namelijk vaak toegepast tot volle tevredenheid van de opdrachtgever. Wat is hier aan de hand?
We lopen de berekening van de constructeur na. De tank heeft een diameter van 30 m. De bodem is 12 mm dik en heeft een eigengewicht van 900 N/m². De elasticiteitsmodulus van staal is 2.1 10^5 N/mm² en de dwarscontractiecoëfficiënt is 0.3. We nemen aan dat alleen vijzels onder de rand van de tank worden geplaatst. Het probleem wordt gemodelleerd als een ronde plaat, aan de randen ingeklemd en belast door het eigengewicht. Het moment in de rand van de plaat is

$$\hat{m}_{rr} = -\frac{1}{8}\, p\, a^2 = -\frac{1}{8}\, 900 \times 15^2 = -25313\ \text{Nm/m}$$



Figuur 20. Opgevijzelde stalen tank

De bijbehorende buigspanning is

$$\sigma = \frac{|m|}{\frac{1}{6} t^2} = \frac{25313}{\frac{1}{6} 12^2} = 1055\ \text{N/mm²}.$$

De plaatstijfheid is

[1] Bron: ir. G.-J. van den Brink, 1998

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{210 \times 10^9 \times 0{,}012^3}{12(1-0{,}3^2)} = 33231\,\text{Nm}.$$

De doorbuiging van de bodem bedraagt

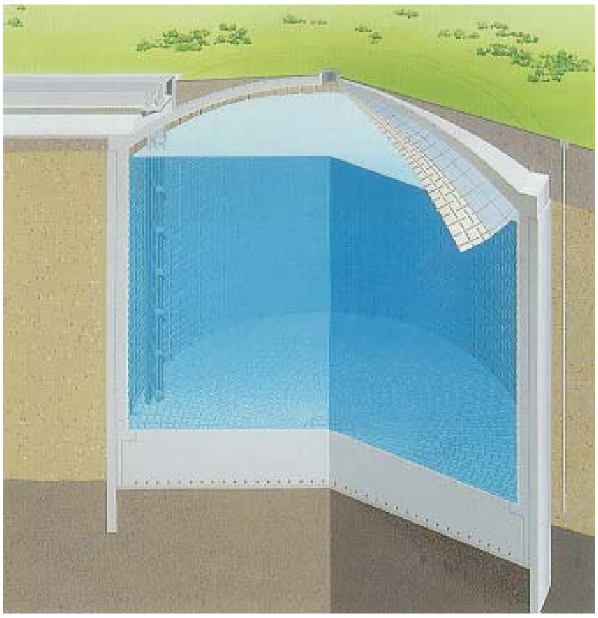
$$\hat{w} = \frac{p\,a^4}{64D} = \frac{900 \times 15^4}{64 \times 33231} = 21\,\text{m}.$$

Het blijkt dat de vervormingen veel groter zijn dan in de afleiding van de differentiaal-vergelijking zijn aangenomen. De theorie voor ronde platen kan derhalve niet op deze tankbodem worden toegepast.

Als een plaat veel doorbuigt wordt de belasting niet alleen gedragen door buiging maar ook door membraanspanningen (zeilwerking). Bovendien zal aan de randen van de plaat het materiaal plastisch vervormen. Als we deze aspecten in rekening brengen in de differentiaalvergelijking voor ronde platen wordt deze te ingewikkeld om analytisch te kunnen oplossen. Om het realistische gedrag van de tankbodem te berekenen moet de eindige-elementenmethode worden gebruikt. Daarbij moet zowel geometrisch als fysisch niet-lineair worden gerekend.

Toepassing: Proefbelasting op betonnen LNG tanks

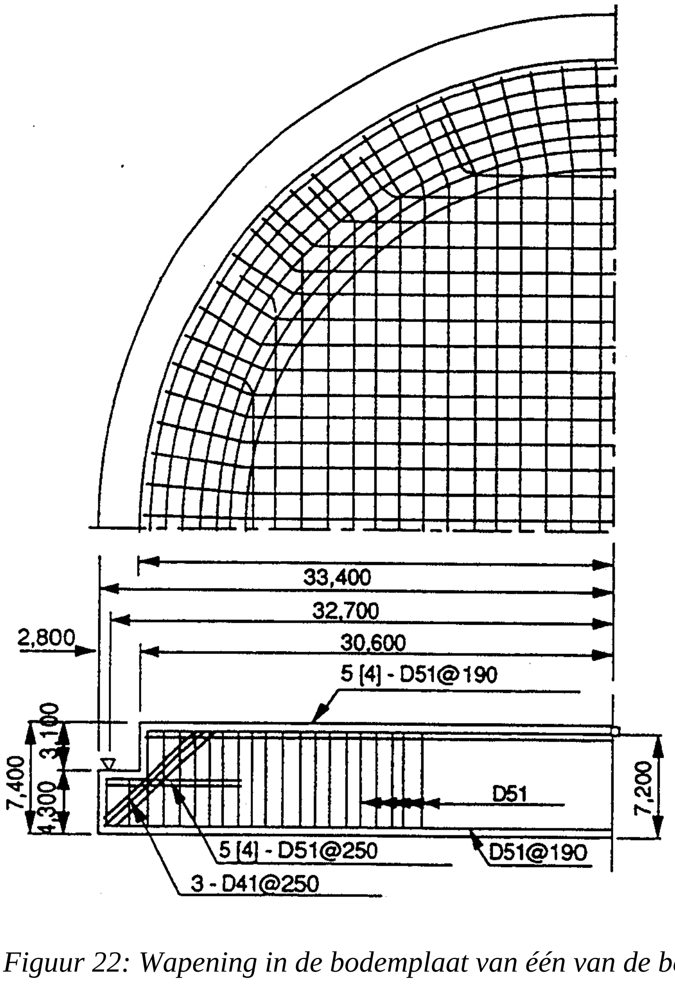
In Japan staan veel opslagtanks voor LNG (liquid natural gas). Japan heeft namelijk geen aardgasvoorraden in de bodem en de opslag is nodig om minder afhankelijk te zijn van buitenlandse omstandigheden. De nieuwste LNG tanks worden ondergronds gebouwd, waarschijnlijk om onbereikbaar te zijn voor Chinese raketten. Nu geldt dat de kosten van de opslag afnemen naarmate de opslagtanks groter wordt. Dit heeft te maken met de verhouding oppervak versus volume waardoor de constructiekosten en koelingkosten (-162º) per liter LNG afnemen. Momenteel zijn betonnen tanks in aanbouw met een diameter van 72 m en een diepte van 49 m. De wanden van deze tanks zijn ongeveer 3 m dik en de vloeren zijn ongeveer 10 m dik (Fig. 21).



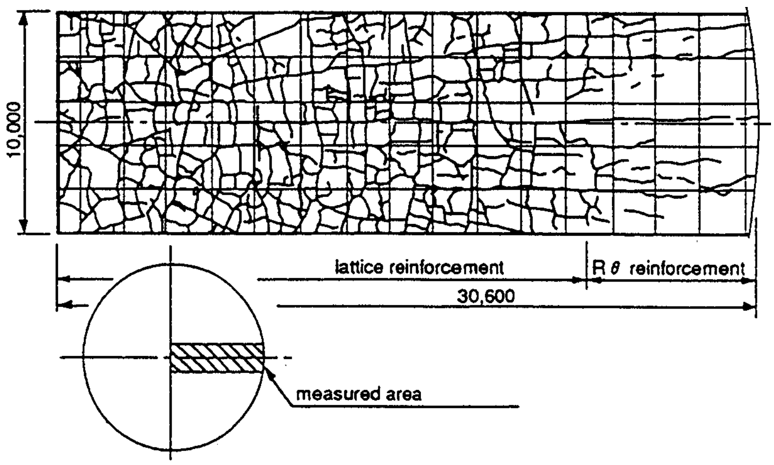
Figuur 21: Ondergrondse tank in de Ohgishima gas terminal, Tokio [4]

Wetenschappers hebben laten zien dat grote constructies minder sterk zijn dan we zouden verwachten op basis van experimenten op kleine constructies. Dit wordt “size effect” genoemd: Hoe groter de constructie, des te kleiner de breukspanning. Dit heeft te maken met scheurvoortplanting. Wetenschappers zijn het nog niet eens over hoe dit moet worden gemodelleerd. Vandaar dat de Japanners niet zeker waren of hun grote betonnen opslagtanks voldoende sterkte hadden. In 1996 hebben ze proefbelastingen uitgevoerd op twee tanks met een bodemdikte van 7,4 en één tank met een bodemdikte van 9,8 m. De inwendige diameters waren 61,2 en 68,9 m respectievelijk (Fig. 22). De belasting bestond uit het op laten komen van het grondwater tot een hoger niveau dan normaal (0,4 en 0,5 N/mm² respectievelijk). De ronde bodemplaten bogen meer dan 50 mm op en vertoonde aanzienlijke scheurvorming onder de ontwerpbelasting maar zijn niet bezweken (Fig. 23). Dit bevestigt de regel dat het betonaandeel van de afschuifsterkte omgekeerd evenredig is met de vierde-machtswortel van de dikte (Fig. 24).

We berekenen de doorbuiging van de tankbodem met de ronde-plaattheorie. We modelleren de verbinding tussen de wanden en de bodem als een scharnier. De elasticiteitsmodulus en dwarscontractiecoëfficiënt zijn E = 0,3 10^5 N/mm² en ν = 0,15 in de gebruikstoestand (vrijwel ongescheurd). De dwarscontractiecoëfficiënt is ν = 0 in de uiterste grenstoestand (gescheurd)



Figuur 22: Wapening in de bodemplaat van één van de beproefde tanks [5]



Figuur 23: Scheurvorming in de bodemplaat van figuur 22 [5]

De plaatstijfheid is

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{0{,}3\times10^5 \times 7400^3}{12(1-0{,}15^2)} = 104\times10^{13}\,\text{Nmm.}$$

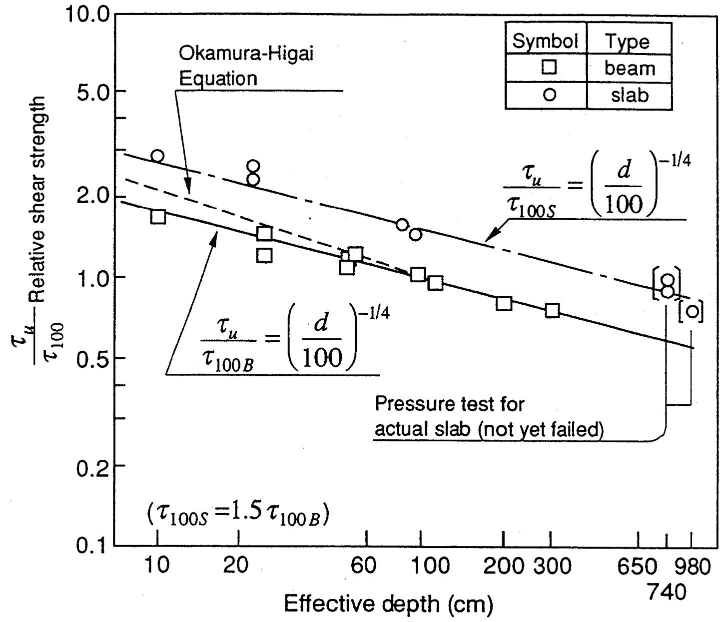
De opbuiging door een waterdruk van 0,2 N/mm² is

$$\hat{w} = \frac{p\,a^4}{64D}\,\frac{5+\nu}{1+\nu} = \frac{0{,}2\times30600^4}{64\times104\times10^{13}}\,\frac{5{,}15}{1{,}15} = 12\text{ mm.}$$

In het experiment werd een opbuiging van 10 mm gemeten bij een waterdruk van 0,2 N/mm². Het moment in het midden van de plaat bij een waterdruk van 0,4 N/mm² is

$$m = \frac{3+\nu}{16}\,p\,a^2 = \frac{3+0}{16}0{,}4\times30600^2 = 702\times10^5\,\text{Nmm/mm.}$$

Het wapeningspercentage in de plaat varieert van 0,6 tot 0,8 %. De hoeveelheid wapeningsstaal is derhalve $0{,}007\times7400 = 52$ mm²/mm. De hefboomsarm is $0{,}9\times7400 = 6660$ mm. De staalspanning is derhalve $\frac{702\times10^5}{6660\times52} = 202$ N/mm². In het experiment werd een spanning van 135 N/mm² gemeten in de hoofdwapening in het midden van de plaat. Het blijkt dat met de ronde-plaattheorie de orde-grootte van vervormingen en spanningen snel kan worden bepaald.



Figuur 24: Invloed van de plaatdikte op de schuifsterkte [5]

Samenvatting

<u>*Ronde schijven*</u>

1. De grootste trekspanning σ in een ronde buis belast door een inwendige overdruk q is
   $$\sigma = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} q$$
   Hierin is a de inwendige straal en b de uitwendige straal van de buis.

2. Door een drukspanning q in een boorgat ontstaat in de wand van het gat een trekspanning q.
   $$\sigma = -q$$

3. Door het boren van een gat in een materiaal met een twee-assige drukspanning q ontstaat een piekspanning $2q$ in de rand van het gat.
   $$\sigma = -2q$$

4. Een gekromde ligger kan worden gemodelleerd in een raamwerkprogramma met een aantal rechte elementen. Voor het berekenen van de grootste spanning in een rechthoekige doorsnede van een gekromde ligger moet het volgende weerstandsmoment worden gebruikt
   $$W = \frac{1}{6} b h^2 \left(1 - \frac{h}{3R}\right) .$$
   Hierin is b de breedte van de doorsnede, h is de hoogte van de doorsnede en R is de straal van de liggerkromming ten opzichte van de hartlijn van de doorsnede.

Ronde platen

5. Als geen steunpuntzetting of temperatuuruitzetting optreedt zullen de momenten onafhankelijk zijn van de elasticiteitsmodulus *E*. De momenten in platen kunnen wel afhankelijk zijn van de dwarscontractiecoëfficiënt ν.

6. De plaattheorie geeft geen realistische momenten en dwarskrachten in een gebied rond een puntlast. Dit gebied heeft een straal van ongeveer de plaatdikte. Daarbuiten is de plaattheorie wel geldig.

7. Bij eindige-elementenberekeningen heeft het geen zin de elementen rond een puntlast (veel) kleiner te maken dan de dikte van de plaat.

8. Een vuistregel voor het grootste moment dat in de praktijk kan optreden onder een puntlast of boven een kolom is $m = F / 3$.

9. Vervangen van een puntlast door een verdeelde belasting met een diameter *b* heeft hetzelfde effect als het uitmiddelen van de momentenpiek over een breedte 2,3*b*.
   Vervangen van een puntvormige ondersteuning door een kolom met een diameter *b* heeft hetzelfde effect als uitmiddelen van de momentenpiek over een breedte 3,8*b*.

10. De plaattheorie van Kirchhoff is niet geldig voor grote doorbuigingen (bijvoorbeeld groter dan de plaatdikte).

Acknowledgement

Veel van de onderwerpen in dit hoofdstuk zijn eerder beschreven in literatuur [1]. Een aantal zaken zijn in dit hoofdstuk verder uitgewerkt en toepassingen zijn toegevoegd. Graag erken ik dat dit geïnspireerd is door de aanstekelijke colleges van prof. Blaauwendraad. Ook zijn recente commentaar op het manuscript wordt bijzonder op prijs gesteld.

Literatuur

1. J. Blaauwendraad, "Elasticiteitstheorie, Directe Methoden, Collegedictaat *TU Delft*, 1999.
2. S.P. Timoshenko, W. Woinowsky-Krieger, "*Theory of Plates and Shells*", McGraw-Hill, Second Edition, New York, 1959.
3. P.C.J. Hoogenboom, “Exam CT5141 Theory of Elasticity”, TU Delft, October 2003, online http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/CT5141_exam_2003_oct.pdf
4. S. Goto, “Large LNG Storage Tanks, Yokohama”, *Structural Engineering International*, No. 3, 1998.
5. T. Shioya, M. Kuroda, H. Akiyama, M. Nakano, Y.Kawamura, ” Design Method for Large Reinforced Concrete Circular Slabs”, Proceedings of *FRAMCOS-3*, AEDIFICATIO Publishers, Freiburg, Germany.
6. Maple, Software, Online 2005, http://www.maplesoft.com.
7. A.C.W.M. Vrouwenvelder and J. Witteveen, "*Plastic Analysis of Structures*, The plastic behaviour and the calculation of plates subjected to bending", Lecture book Delft University of Technology, March 2003.

Bijlage 1: Maple-berekening van een dikwandige buis

```
> restart:
> with(DEtools):
> eq:=r*(D@@2)(sigma)(r)+3*D(sigma)(r)=0;
```

$$eq := r\,(D^{(2)})(\sigma)(r) + 3\,D(\sigma)(r) = 0$$

```
> bound_cond:= sigma(a)=qin, sigma(b)=qui;
```

$$bound\_cond := \sigma(a) = qin,\ \sigma(b) = qui$$

```
> solution:=dsolve({eq,bound_cond},sigma(r));
```

$$solution := \sigma(r) = \frac{-qui\,b^2 + qin\,a^2}{a^2 - b^2} - \frac{b^2\,a^2\,(qin - qui)}{(a^2 - b^2)\,r^2}$$

```
> sigma[rr]:=( a^2*b^2*(qin-qui)+r^2*(b^2*qui-a^2*qin) ) / ( r^2*(b^2-a^2) );
```

$$\sigma_{rr} := \frac{b^2\,a^2\,(qin - qui) + r^2\,(qui\,b^2 - qin\,a^2)}{r^2\,(b^2 - a^2)}$$

```
> sigma[tt]:=simplify(diff(r*sigma[rr],r));
```

$$\sigma_{tt} := \frac{a^2\,b^2\,qin - a^2\,b^2\,qui - r^2\,qui\,b^2 + r^2\,qin\,a^2}{r^2\,(a^2 - b^2)}$$

```
> r:=a: sigma[ttmax]:=simplify(sigma[tt]); r:='r':
```

$$\sigma_{ttmax} := \frac{b^2\,qin - 2\,qui\,b^2 + qin\,a^2}{a^2 - b^2}$$

```
> sigma[zz1]:=simplify(v*(sigma[rr]+sigma[tt]));
```

$$\sigma_{zz1} := 2\,\frac{v\,(-qui\,b^2 + qin\,a^2)}{a^2 - b^2}$$

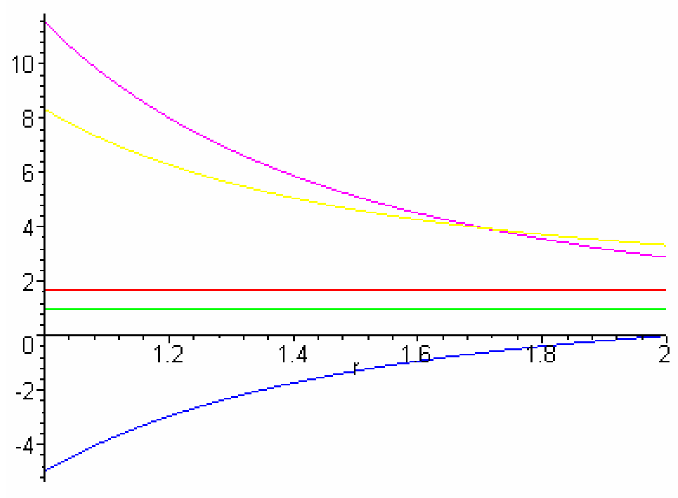
```
> N:=simplify(sigma[zz1]*(Pi*b^2-Pi*a^2));
```

$$N := -2\,\pi\,(-qui\,b^2 + qin\,a^2)\,v$$

```
> sigma[zz2]:=simplify( (Pi*b^2*qui - Pi*a^2*qin) / (Pi*b^2-Pi*a^2) );
```

$$\sigma_{zz2} := \frac{-qui\,b^2 + qin\,a^2}{a^2 - b^2}$$

```
> sigma[VM]:=sqrt(1/2*((sigma[tt]-sigma[zz2])^2+(sigma[zz2]-sigma[rr])^2+(sigma[rr]-
sigma[tt])^2)):
>
> a:=1: b:=2: qin:=-5: qui:=0: v:=0.3:
plot({sigma[rr],sigma[tt],sigma[zz1],sigma[zz2],sigma[VM]},r=a..b);
```



Bijlage 2: Afleiding van de kinematische en evenwichtsvergelijking van een ronde plaat

In de figuur is de vervorming van de tangentiele vezels getekend. Hieruit blijkt dat

$$\frac{R}{\psi r} = \frac{R + \frac{1}{2}h}{\psi(r + \varphi\frac{1}{2}h)}\,.$$

Dit kan worden vereenvoudigd tot $R = \frac{r}{\varphi}$.

omdat $\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{R}$ en $\varphi = \frac{dw}{dr}$ vinden we $\boxed{\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}}$.

In het voorgaande zijn kleine rotaties φ verondersteld. We kunnen de afleiding ook doen voor elke rotatie.

$$\frac{R}{\psi r} = \frac{R + \frac{1}{2}h}{\psi(r + \sin\varphi\frac{1}{2}h)}\,.$$

Dit kan vereenvoudigd worden tot

$$R = \frac{r}{\sin\varphi}\,.$$

Omdat $\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{R}$ en $\tan\varphi = \frac{dw}{dr}$ vinden we

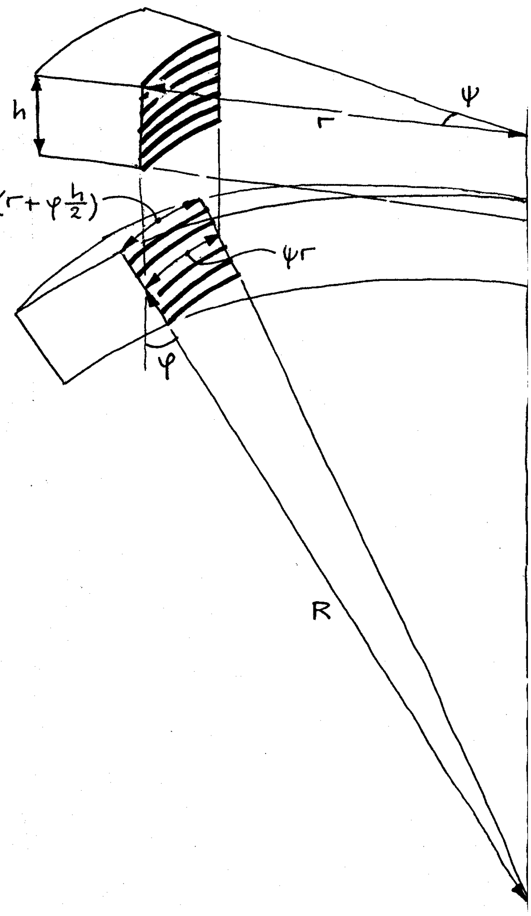
$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\sin\left(\arctan\frac{dw}{dr}\right).$$

Dit kan uitgewerkt worden tot

$$\kappa_{\theta\theta} = \frac{-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}}{\sqrt{1+\left(\frac{dw}{dr}\right)^2}}\,.$$

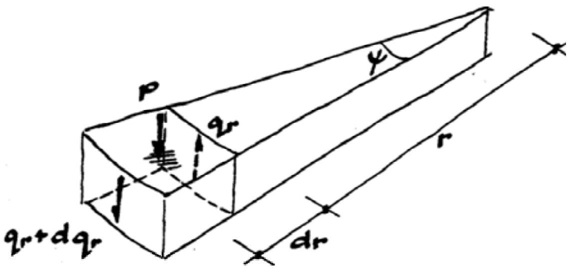
De eerste twee termen van de Taylor-ontwikkeling in $\frac{dw}{dr} = 0$ geeft

$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^3.$$



Vervorming van een representatief deel van een axiaalsymmetrische plaat

Afleiding van de evenwichtsvergelijking



verticaal evenwicht

$$p\,dr\,\varphi\,r = q_r\,\varphi\,r - (q_r + dq_r)(r + dr)\,\varphi$$

$$p\,dr\;r = q_r\,r - q_r\,(r + dr) - dq_r\,(r + dr)$$

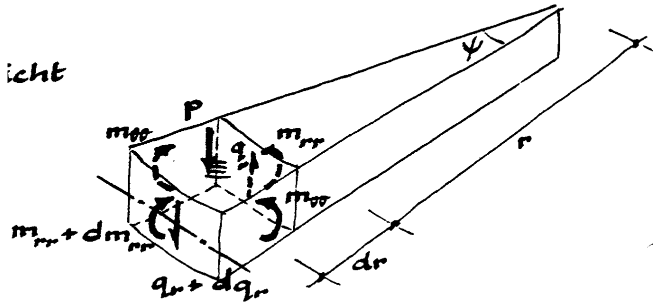
$$p\,dr\;r = q_r\,r - q_r\,r - q_r\,dr - dq_r\,r - dq_r\,dr$$

$$p\,dr\;r = -q_r\,dr - dq_r\,r - dq_r\,dr$$

$$p\,r = -q_r - r\frac{dq_r}{dr} - dq_r$$

$$p\,r = -q_r - r\frac{dq_r}{dr}$$

$$pr = -\frac{d}{dr}(r\,q_r) \qquad (1)$$



Moment evenwicht

$$0 = (m_{rr} + dm_{rr})\,\varphi(r + dr) - m_{rr}\,\varphi\,r + p\,dr\,\varphi\,r\frac{dr}{2} - q_r\varphi\,r\,dr - 2\,m_{\theta\theta}\,dr\frac{\varphi}{2}$$

$$0 = (m_{rr} + dm_{rr})(r + dr) - m_{rr}\;r + p\,dr\;r\frac{dr}{2} - q_r\,r\,dr - 2\,m_{\theta\theta}\,dr\frac{1}{2}$$

$$0 = m_{rr}\,(r + dr) + dm_{rr}\,(r + dr) - m_{rr}\;r + p\,dr\;r\frac{dr}{2} - q_r\,r\,dr - 2\,m_{\theta\theta}\,dr\frac{1}{2}$$

$$0 = m_{rr}\,r + m_{rr}\,dr + dm_{rr}\,r + dm_{rr}\,dr - m_{rr}\;r + p\,dr\;r\frac{dr}{2} - q_r\,r\,dr - 2\,m_{\theta\theta}\,dr\frac{1}{2}$$

$$0 = m_{rr}\,dr + dm_{rr}\,r + dm_{rr}\,dr + p\,dr\;r\frac{dr}{2} - q_r\,r\,dr - 2\,m_{\theta\theta}\,dr\frac{1}{2}$$

$$0 = m_{rr} + \frac{dm_{rr}}{dr}r + dm_{rr} + p\;\;r\frac{dr}{2} - q_r\,r - m_{\theta\theta}$$

$$0 = m_{rr} + \frac{dm_{rr}}{dr}r - q_r\,r - m_{\theta\theta}$$

$$0 = \frac{d(r\,m_{rr})}{dr} - q_r\,r - m_{\theta\theta} \qquad (2)$$

Substitutie van (2) in (1) geeft

$$pr = -\frac{d^2(r\,m_{rr})}{dr^2} + \frac{d}{dr}m_{\theta\theta}\,.$$

Bijlage 3. Maple-berekening van een scharnierende ronde plaat met verdeelde belasting

```
> restart:
> with(DEtools):
> w:=p/(64*K)*(a^2*(5+v)/(1+v)-r^2)*(a^2-r^2);
```

$$w := \frac{1}{64}\,\frac{p\left(\frac{a^2\,(5+v)}{1+v}-r^2\right)(a^2-r^2)}{K}$$

```
> check:=simplify( diff(w,r,r,r,r)+2/r*diff(w,r,r,r)-1/r^2*diff(w,r,r)+1/r^3*diff(w,r) );
```

$$check := \frac{p}{K}$$

```
> phi:=diff(w,r):
> mrr:=simplify(-K*( diff(w,r,r)+v/r*diff(w,r) )):
> mtt:=simplify(-K*( 1/r*diff(w,r)+v*diff(w,r,r) )):
> q:=simplify(-K*( diff(w,r,r,r)+1/r*diff(w,r,r)-1/r^2*diff(w,r) ));
```

$$q := -\frac{1}{2}\,p\,r$$

```
> r:=0: simplify(w); simplify(phi); simplify(q); simplify(mrr); simplify(mtt); r:='r':
```

$$\frac{1}{64}\,\frac{p\,a^4\,(5+v)}{K\,(1+v)}$$

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{16}\,a^2\,(v+3)\,p$$

$$\frac{1}{16}\,a^2\,(v+3)\,p$$

```
> r:=a: simplify(w); simplify(phi); simplify(q); simplify(mrr); simplify(mtt); r:='r':
```

$$0$$

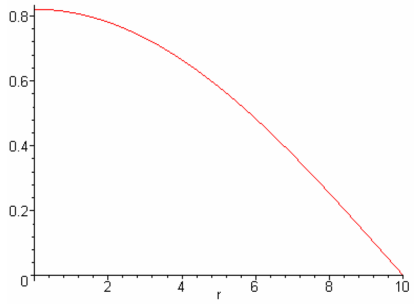
$$-\frac{1}{8}\,\frac{p\,a^3}{K\,(1+v)}$$

$$-\frac{1}{2}\,p\,a$$

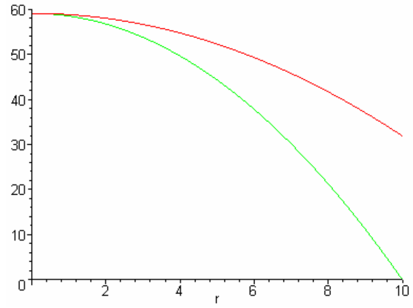
$$0$$

$$-\frac{1}{8}\,a^2\,(v-1)\,p$$

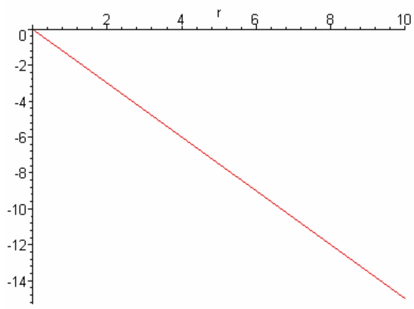
```
> sigma[rr]:=mrr/(1/6*h^2):
> sigma[tt]:=mtt/(1/6*h^2):
> sigma[VM]:=sqrt(1/2*((sigma[rr]-0)^2+(0-sigma[tt])^2+(sigma[tt]-sigma[rr])^2)):
>
> a:=10:    # m
> h:=0.1:   # m
> E:=0.3e8: # kN/m2 = N/mm2/1000
> v:=0.15:  # -
> K:=E*h^3/(12*(1-v^2)):
> p:=3:     # kN/m2
>
> plot(w,r=0..a);
```



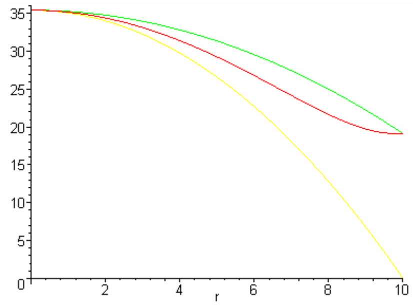
```
> plot({mrr,mtt},r=0..a);
```




```
> plot(q,r=0..a);
```




```
> plot({sigma[rr]/1000,sigma[tt]/1000,sigma[VM]/1000},r=0..a); # N/mm2
```



Bijlage 4. Maple-berekening van een ingeklemde ronde plaat met puntlast

```
> restart:
> with(DEtools):
> eq:=(D@@4)(w)(r)+2/r*(D@@3)(w)(r)-1/r^2*(D@@2)(w)(r)+1/r^3*D(w)(r)=0;
```

$$eq := (D^{(4)})(w)(r) + \frac{2\,(D^{(3)})(w)(r)}{r} - \frac{(D^{(2)})(w)(r)}{r^2} + \frac{D(w)(r)}{r^3} = 0$$

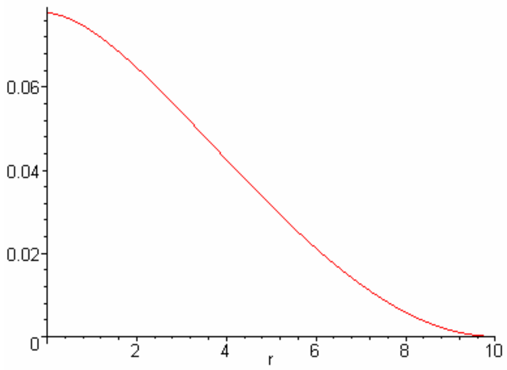
```
> bound_cond:= w(a)=0, D(w)(a)=0, D(w)(0)=0,  -K*( (D@@3)(w)(r)+1/r*(D@@2)(w)(r)-
1/r^2*D(w)(r) ) =-F/(2*Pi*r);
```

$$bound\_cond := w(a) = 0, D(w)(a) = 0, D(w)(0) = 0,$$
$$-K\left((D^{(3)})(w)(r) + \frac{(D^{(2)})(w)(r)}{r} - \frac{D(w)(r)}{r^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{F}{\pi\, r}$$

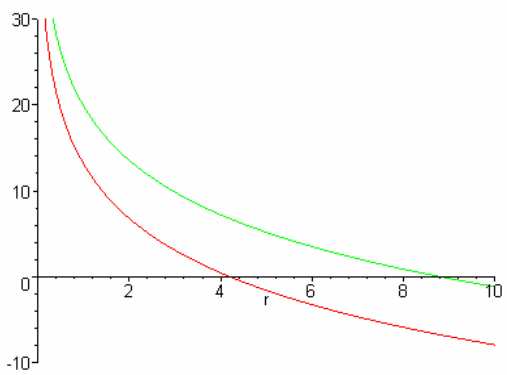
```
> solution:=dsolve({bound_cond},w(r));
```

$$solution := w(r) = -\frac{1}{16}\frac{r^2 F\,(2\ln(a)-1)}{K\pi} + \frac{\frac{1}{8}F\,r^2\ln(r)}{K\pi} - \frac{1}{8}\frac{F\,r^2}{K\pi} + \frac{\frac{1}{16}F\,a^2}{K\pi}$$

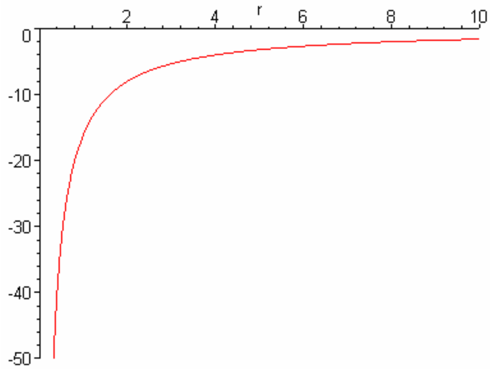
```
> w:=F*a^2/(16*Pi*K)*(1-r^2/a^2) + F*r^2/(8*Pi*K)*ln(r/a):
> mrr:=-K*(diff(w,r,r)+v/r*diff(w,r)):
> mtt:=-K*(1/r*diff(w,r)+v*diff(w,r,r)):
> q:=-K*( diff(w,r,r,r)+1/r*diff(w,r,r)-1/r^2*diff(w,r) ):
> sigma[rr]:=mrr/(1/6*h^2):
> sigma[tt]:=mtt/(1/6*h^2):
> sigma[VM]:=sqrt(1/2*((sigma[rr]-0)^2+(0-sigma[tt])^2+(sigma[tt]-sigma[rr])^2)):
>
> a:=10:    # m
> h:=0.1:   # m
> E:=0.3e8: # kN/m2 = N/mm2/1000
> v:=0.15:  # -
> K:=E*h^3/(12*(1-v^2)):
> F:=100:   # kN
> plot(w,r=0..a);
```



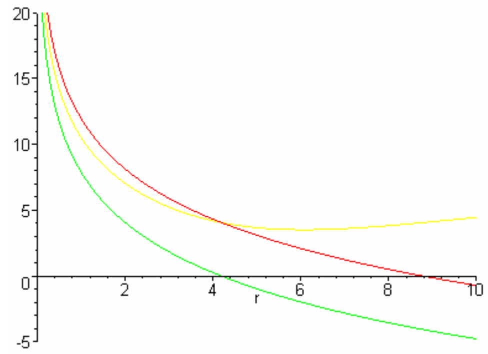

```
> plot({mrr,mtt},r=0..a,-10..30);
```




```
> plot(q,r=0..a,-50..0);
```




```
> plot({sigma[rr]/1000,sigma[tt]/1000,sigma[VM]/1000},r=0..a,-5..20); # N/mm2
```




```
>
>
```

Bijlage 5: Verdeelde puntlast op een scharnierend ondersteunde plaat

```
> restart:
> p:=F/(Pi*a^2):
> w1:=C1+C2*r^2+C3*ln(r)+C4*r^2*ln(r)+p*r^4/(64*K): w2:=C5+C6*r^2+C7*ln(r)+C8*r^2*ln(r):
> phi1:=diff(w1,r): phi2:=diff(w2,r):
> mrr1:=-K*(diff(w1,r,r)+v/r*diff(w1,r)): mrr2:=-K*(diff(w2,r,r)+v/r*diff(w2,r)):
> mtt1:=-K*(1/r*diff(w1,r)+v*diff(w1,r,r)): mtt2:=-K*(1/r*diff(w2,r)+v*diff(w2,r,r)):
> q1:=-K*(diff(w1,r,r,r)+1/r*diff(w1,r,r)-1/r^2*diff(w1,r)): q2:=-
K*(diff(w2,r,r,r)+1/r*diff(w2,r,r)-1/r^2*diff(w2,r)):
> eq1:=C3=0: eq2:=C4=0:
> r:=a: eq3:=w1=w2: eq4:=phi1=phi2: eq5:=mrr1=mrr2: eq6:=q1=q2: r:='r':
> r:=b: eq7:=w2=0: eq8:=mrr2=0: r:='r':
> opl:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8},{C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8}):
> assign(opl):
> simplify(w1);
```

$$-\frac{1}{64} F \left(7 b^2 a^4 - 12 b^4 a^2 + 3 b^2 a^4 v - 4 b^4 a^2 v + 4 b^2 a^4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 4 b^2 a^4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) v + 8 r^2 a^2 b^2 - 2 r^2 a^4 + 2 r^2 a^4 v + 8 r^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) b^2 + 8 r^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) v b^2 - r^4 b^2 - r^4 b^2 v\right) \Big/ \left(\pi K (1+v) b^2 a^2\right)$$

```
> simplify(w2);
```

$$-\frac{1}{32} F \left(b^2 a^2 - 6 b^4 - b^2 v a^2 - 2 b^4 v + 2 b^2 a^2 \ln(b) + 2 b^2 a^2 \ln(b) v - r^2 a^2 + 4 r^2 b^2 \ln(b) + 6 r^2 b^2 + r^2 v a^2 + 4 r^2 v b^2 \ln(b) + 2 r^2 v b^2 - 2 a^2 \ln(r) b^2 - 2 a^2 \ln(r) b^2 v - 4 r^2 \ln(r) b^2 - 4 r^2 \ln(r) b^2 v\right) \Big/ \left(\pi K b^2 (1+v)\right)$$

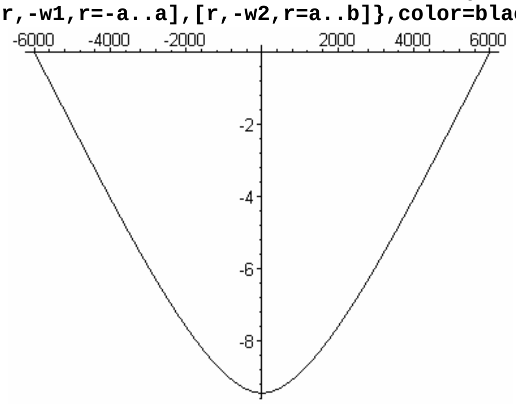
```
> wt:=limit(w1,r=0);
```

$$wt := -\frac{1}{64} \frac{F \left(7 a^2 - 12 b^2 + 3 v a^2 - 4 v b^2 + 4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) a^2 + 4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) v a^2\right)}{\pi K (1+v)}$$

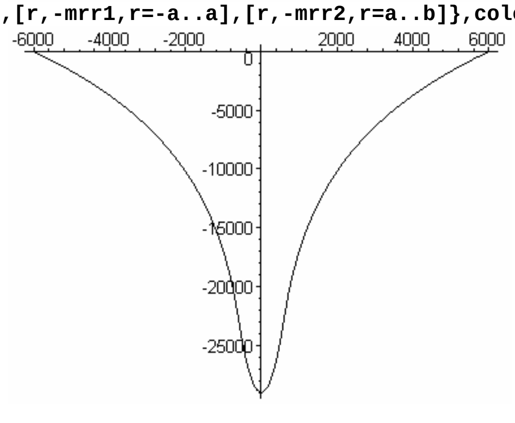
```
> mrrt:=limit(mrr1,r=0);
```

$$mrrt := \frac{1}{16} \frac{F \left(4 b^2 - a^2 + v a^2 + 4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) b^2 + 4 \ln\left(\frac{b}{a}\right) v b^2\right)}{b^2 \pi}$$

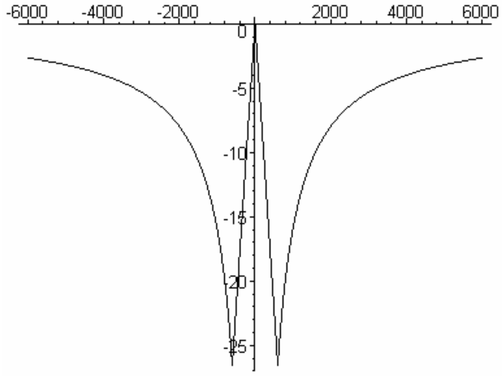
```
> b:=6000: t:=200: a:=3*t:  E:=0.3e5: v:=0.15: F:=100000: K:=(E*t^3)/(12*(1-v^2)):
> plot({[-r,-w2,r=a..b],[r,-w1,r=-a..a],[r,-w2,r=a..b]},color=black);
```



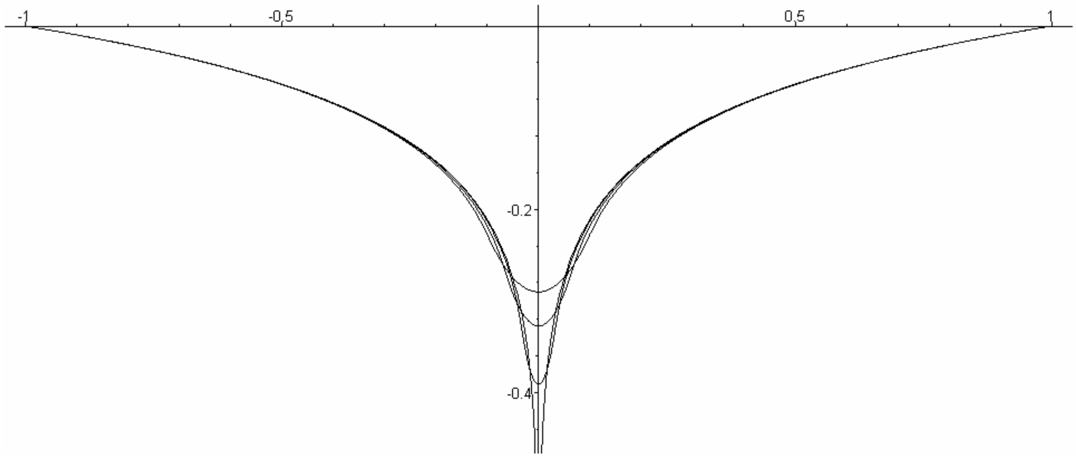

```
> plot({[-r,-mrr2,r=a..b],[r,-mrr1,r=-a..a],[r,-mrr2,r=a..b]},color=black);
```



```
> plot({[-r,q2,r=a..b],[-r,q1,r=0..a],[r,q1,r=0..a],[r,q2,r=a..b]},color=black);
```



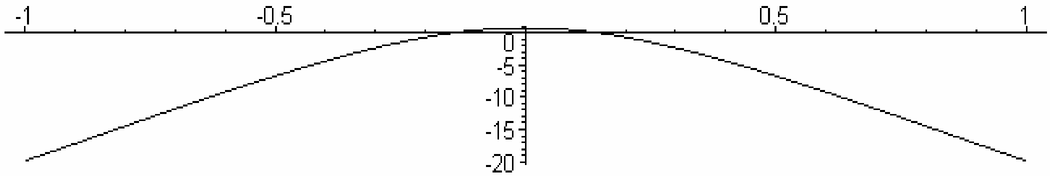

```
> b:=1: t:=b/30: a:=0.00001:  E:=0.3e5: v:=0.15: F:=1: K:=(E*t^3)/(12*(1-v^2)):
> f0:=[-r,-mrr2,r=a..b],[r,-mrr1,r=-a..a],[r,-mrr2,r=a..b]:
> b:=1: t:=b/30: a:=t:  E:=0.3e5: v:=0.15: F:=1: K:=(E*t^3)/(12*(1-v^2)):
> f1:=[-r,-mrr2,r=a..b],[r,-mrr1,r=-a..a],[r,-mrr2,r=a..b]:
> b:=1: t:=b/30: a:=2*t:  E:=0.3e5: v:=0.15: F:=1: K:=(E*t^3)/(12*(1-v^2)):
> f2:=[-r,-mrr2,r=a..b],[r,-mrr1,r=-a..a],[r,-mrr2,r=a..b]:
> b:=1: t:=b/30: a:=3*t:  E:=0.3e5: v:=0.15: F:=1: K:=(E*t^3)/(12*(1-v^2)):
> f3:=[-r,-mrr2,r=a..b],[r,-mrr1,r=-a..a],[r,-mrr2,r=a..b]:
> plot({f0,f1,f2,f3},color=black);
```



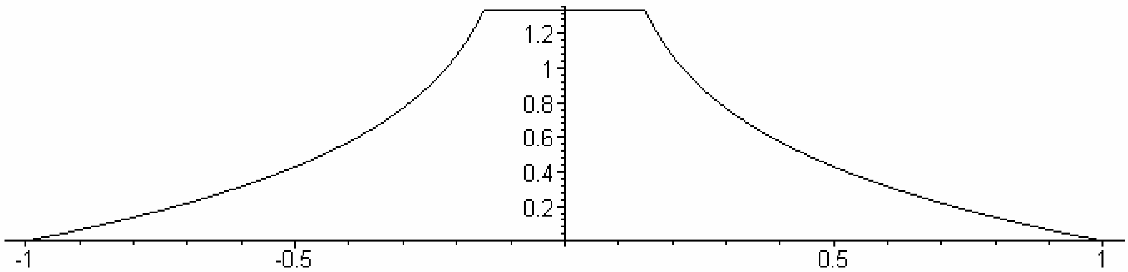

```
>
```

Bijlage 7. Cirkelvormige ondersteuning met randbelasting

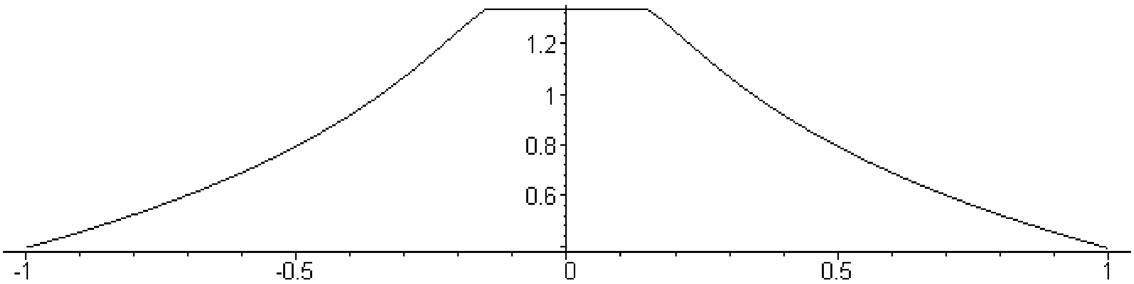
```
> restart:
> w1:=C1+C2*r^2+C3*ln(r)+C4*r^2*ln(r):
> w2:=C5+C6*r^2+C7*ln(r)+C8*r^2*ln(r):
> phi1:=diff(w1,r): phi2:=diff(w2,r):
> mrr1:=-K*(diff(w1,r,r)+v/r*diff(w1,r)): mrr2:=-K*(diff(w2,r,r)+v/r*diff(w2,r)):
> mtt1:=-K*(1/r*diff(w1,r)+v*diff(w1,r,r)): mtt2:=-K*(1/r*diff(w2,r)+v*diff(w2,r,r)):
> q1:=-K*(diff(w1,r,r,r)+1/r*diff(w1,r,r)-1/r^2*diff(w1,r)): q2:=-
K*(diff(w2,r,r,r)+1/r*diff(w2,r,r)-1/r^2*diff(w2,r)):
>
> r:=0: eq1:=C3=0: eq2:=C4=0: r:='r':
> r:=a: eq3:=w1=0: eq4:=w2=0: eq5:=phi1=phi2: eq6:=mrr1=mrr2: r:='r':
> r:=b: eq7:=mrr2=0: eq8:=q2=q: r:='r':
> opl:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8},{C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8}):
> assign(opl):
> simplify(w1):
> simplify(w2):
>
> q:=1:    # kN/m
> v:=0.2:  # -
> a:=0.15: # m
> b:=1:    # m
> E:=30:   # kN/m2
> t:=0.18: # m
> K:=E*t^3/12/(1-v^2):
>
> plot({[-r,-w2,r=a..b],[r,-w1,r=-a..a],[r,-w2,r=a..b]},color=black);
```



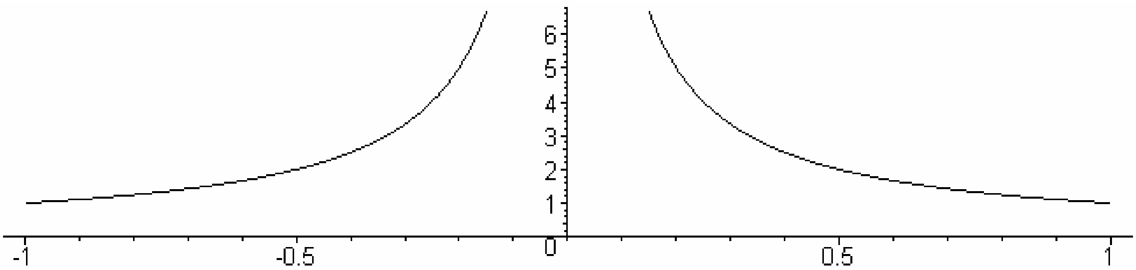

```
> plot({[-r,-mrr2,r=a..b],[r,-mrr1,r=-a..a],[r,-mrr2,r=a..b]},color=black);
```




```
> plot({[-r,-mtt2,r=a..b],[r,-mtt1,r=-a..a],[r,-mtt2,r=a..b]},color=black);
```




```
> plot({[-r,q2,r=a..b],[r,q1,r=-a..a],[r,q2,r=a..b]},color=black);
```




```
> q:='q': v:='v': a:='a': b:='b': K:='K':
> R:=2*Pi*a*simplify(limit(q2,r=a)-limit(q1,r=a));
```

$$R := 2\,\pi\,q\,b$$

```
> wt:=limit(w2,r=b);
```

$$wt := -\frac{1}{8}((-4\,a^2\,b^2\ln(a)\,v + 4\,a^2\,b^2 + a^4\,v - 4\,a^2\,b^2\ln(a) - a^4 + 4\,a^2\,v\,b^2\ln(b) - v\,b^4$$
$$+ 4\,a^2\,b^2\ln(b) - 3\,b^4)\,q)/(b\,K\,(1+v))$$

```
> mt1:=limit(mrr2,r=a);
```

$$mt1 :=$$
$$-\frac{1}{4}\,\frac{q\,(-a^2 + 2\ln(b)\,b^2 + b^2 + v\,a^2 + 2\,v\ln(b)\,b^2 - v\,b^2 - 2\,b^2\ln(a) - 2\,b^2\ln(a)\,v)}{b}$$

```
> mt2:=-q*b/4 * ( (1-(a/b)^2)*(1-v) +2*(ln(b)-ln(a))*(1+v) );
```

$$mt2 := -\frac{1}{4}\,q\,b\left(\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)(1-v) + 2\,(\ln(b)-\ln(a))\,(1+v)\right)$$

```
> simplify(mt1-mt2);
```

$$0$$